Appunti di Fisica A

Lezioni 1–15

Oliver F. Piattella

Corso di Laurea in Ingegneria per la sicurezza del lavoro e dell'ambiente
Università degli Studi dell'Insubria

of.piattella@uninsubria.it www.oliverfpiattella.eu

▶ Animazioni interattive collegate agli appunti

Anno Accademico 2026/2027

Lezioni dal 21 settembre 2026

© 2026 Oliver F. Piattella. Tutti i diritti riservati salvo quanto indicato sotto.

Quest'opera è distribuita con licenza **Creative Commons Attribuzione – Non opere derivate 4.0 Internazionale (CC BY-ND 4.0)**. Il testo della licenza è disponibile all'indirizzo `https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.it`.

In sintesi, è consentito condividere, riprodurre e distribuire questi appunti con qualsiasi mezzo e formato, alle seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: si deve citare l'autore (Oliver F. Piattella), indicare la licenza e fornire un link ad essa;
- **Non opere derivate**: non è consentito distribuire versioni modificate, rielaborate o tratte da questi appunti.

Dichiarazione sull'uso dell'intelligenza artificiale. In conformità con le Linee guida dell'Università degli Studi dell'Insubria sull'uso dell'IA (Didattica, art. 5), si dichiara che nella preparazione di questi appunti è stato usato Claude (Anthropic), un assistente basato su IA generativa. È stato impiegato per trascrivere in LaTeX gli appunti manoscritti delle lezioni, ridisegnare le figure, segnalare errori e incoerenze di notazione e scrivere il codice delle animazioni interattive collegate. Il contributo dell'IA riguarda la forma (trascrizione, impaginazione, figure, codice) e la revisione; contenuti, impostazione e scelte didattiche sono dell'autore, che ha verificato criticamente tutto il materiale e ne assume la piena responsabilità.

Indice

Lezione 1 *Lunedì 21 settembre 2026* **6**

1.1 Grandezze fisiche e misura **6**

1.2 Cifre significative **7**

1.3 Notazione scientifica **7**

1.4 Ordine di grandezza **8**

1.5 Il Sistema Internazionale (SI) **9**

1.6 Conversioni di unità **10**

1.7 Analisi dimensionale (equazioni dimensionali) **10**

Lezione 2 *Venerdì 25 settembre 2026* **12**

2.1 Ordini di grandezza, potenze di 10 e cifre significative **12**

2.2 Grandezze fisiche scalari e vettoriali — Sistemi di riferimento **13**

2.3 Operazioni con i vettori **15**

2.4 Torniamo al sistema di riferimento cartesiano **17**

Lezione 3 *Lunedì 28 settembre 2026* **20**

3.1 Operazioni con i vettori **20**

3.2 Angoli e funzioni trigonometriche **21**

3.3 Sistema di riferimento cartesiano **22**

3.4 Cinematica del punto **22**

3.5 Moto rettilineo uniforme (1 dimensione) **25**

Lezione 4 *Venerdì 2 ottobre 2026* **26**

4.1 Velocità media e traiettoria **26**

4.2 Velocità istantanea **26**

4.3 Moto rettilineo uniforme **27**

4.4 Moto rettilineo uniformemente accelerato **28**

4.5 Caduta libera **29**

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

4.6 Moto armonico **30**

4.7 Moti in 2d **32**

Lezione 5 *Lunedì 5 ottobre 2026* **33**

5.1 Scelta dell'origine del tempo e fase del moto armonico **33**

5.2 Moto circolare uniforme (moto in 2 dimensioni) **33**

5.3 Moto circolare uniforme con i soli vettori **35**

5.4 Composizione di due moti **35**

5.5 Moto parabolico **36**

5.6 Moti relativi **38**

5.7 Dinamica **39**

Lezione 6 *Venerdì 9 ottobre 2026* **40**

6.1 Sistemi di riferimento inerziali; azione e reazione **40**

6.2 Seconda legge: la forza risultante **40**

6.3 Terza legge e conservazione della quantità di moto **41**

6.4 Forza costante e unità di misura della forza **42**

6.5 Diagrammi delle forze **42**

6.6 Piano inclinato **43**

6.7 Pendolo **44**

6.8 Due masse collegate da un filo **45**

6.9 Forza di attrito **46**

Lezione 7 *Venerdì 16 ottobre 2026* **48**

7.1 Reazione vincolare: blocco spinto verso il basso **48**

7.2 Forza di attrito **48**

7.3 Traino obliquo **50**

7.4 Piano inclinato con attrito **51**

Lezione 8 *Lunedì 19 ottobre 2026* **54**

8.1 Spazio di frenata su una superficie scabra **54**

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

8.2 Forza elastica (molla) **54**

8.3 Forza gravitazionale **57**

8.4 Lavoro di una forza **60**

Lezione 9 *Venerdì 23 ottobre 2026* **61**

9.1 Lavoro ed energia cinetica con velocità iniziale non nulla **61**

9.2 Lavoro di una forza non costante **62**

9.3 Teorema dell'energia cinetica **62**

9.4 Lavoro di una reazione vincolare **64**

9.5 Forze conservative **65**

9.6 Conservazione dell'energia meccanica **66**

Lezione 10 *Lunedì 26 ottobre 2026* **68**

10.1 Più energie potenziali **68**

10.2 Energia potenziale gravitazionale **68**

10.3 Energia potenziale elastica **71**

10.4 Potenza **72**

10.5 Altri esempi di conservazione dell'energia meccanica **72**

10.6 Forze non conservative **73**

10.7 Impulso e quantità di moto **74**

10.8 Conservazione della quantità di moto **75**

Lezione 11 *Venerdì 30 ottobre 2026* **76**

11.1 Forze conservative e non conservative **76**

11.2 Dall'energia potenziale alla forza **78**

11.3 Forze apparenti **79**

11.4 Quantità di moto totale di un sistema di masse puntiformi **80**

11.5 Urti **81**

Lezione 12 *Lunedì 2 novembre 2026* **84**

12.1 Urto elastico con entrambe le masse in moto **84**

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

12.2 Urto totalmente anelastico **87**

12.3 Urti in 2 dimensioni (biliardo) **89**

Lezione 13 *Venerdì 6 novembre 2026* **91**

13.1 Conservazione della quantità di moto totale: esempi **91**

13.2 Centro di massa **91**

13.3 Centro di massa in due dimensioni **93**

13.4 Centro di massa di un corpo continuo **93**

13.5 Il centro di massa si può calcolare "a pezzi" **94**

13.6 Proiettile che esplode in volo **95**

13.7 Energia cinetica di un sistema: teorema di König **96**

Lezione 14 *Lunedì 9 novembre 2026* **98**

14.1 Teorema di König: conseguenze **98**

14.2 Momento torcente e momento angolare di un punto **99**

14.3 Momento angolare di un sistema di N particelle **102**

14.4 Conservazione del momento angolare totale **104**

Lezione 15 *Venerdì 13 novembre 2026* **105**

15.1 Le equazioni cardinali **105**

15.2 Dinamica rotazionale: dalla seconda legge a $\tau = dL/dt$ **105**

15.3 Conservazione del momento angolare: un esempio **107**

15.4 Momento angolare e centro di massa **107**

15.5 Corpo rigido e momento di inerzia **108**

15.6 Teorema degli assi paralleli **109**

15.7 Urto eccentrico **110**

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 1

Lunedì 21 settembre 2026

Che cos'è la Fisica

FISICA

↓

Studiare la Natura (i fenomeni naturali) in modo quantitativo

↓

Matematica

Metodo scientifico (Galileo)

⋆ Osservazione di un qualche fenomeno naturale (curiosità)

⋆ Modello matematico

⋆ Esperimento (interrogazione mirata, controllata della Natura)

⋆ Verifica del modello $\longrightarrow$ non significa che il modello è vero

Confutazione del modello $\longrightarrow$ rivedere (modificare)

⋆ Previsioni teoriche da verificare.
(la teoria ci dice di andare a vedere nuovi fenomeni).

1.1 Grandezze fisiche e misura

$$\text{Grandezza fisica} = \text{valore numerico} \times \text{unità di misura}$$

Es.

$$L = 1{,}8\,\text{m} \quad \text{(metri)}$$
$$t = 4{,}2\,\text{s} \quad \text{(secondi)}$$
$$m = 72\,\text{kg} \quad \text{(chilogrammi)}$$

⋆ Una misura non è mai infinitamente precisa:

$$x = x_{\text{mis}} \pm \Delta x \qquad (\Delta x > 0)$$

x: quantità fisica ideale che volete misurare

Δx: errore

$$L = (12{,}4 \underbrace{\pm 0{,}1}_{\substack{\text{errore o}\\ \text{incertezza}}})\,\text{cm}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

In realtà:

errore $\longrightarrow$ descrizione statistica

incertezza $\longrightarrow$ dipende dallo strumento che usiamo per misurare

$$\Delta x \equiv \text{incertezza assoluta} \quad (> 0)$$
$$\frac{\Delta x}{|x|} \equiv \text{incertezza relativa}$$
$$\varepsilon_{\%} = 100\,\frac{\Delta x}{|x|}$$

Es. $L = (20{,}0 \pm 0{,}2)\,\text{cm}$

$$\Delta x = 0{,}2\,\text{cm}, \qquad \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0{,}2\,\cancel{\text{cm}}}{20{,}0\,\cancel{\text{cm}}} = \frac{0{,}2}{20{,}0} = 0{,}01 \qquad (1\%)$$

1.2 Cifre significative

Se uno strumento permette di misurare lunghezze con un'incertezza del mm, scrivere

$$L = 12{,}347896\,\text{cm}$$

non ha senso. Si scrive

$$L = 12{,}3\,\text{cm}.$$

Ma, se $L = 12{,}357896\,\text{cm}$, allora $L = 12{,}4\,\text{cm}$.

In $12{,}3\,\text{cm}$ abbiamo 3 cifre significative.

Es. 0,000450. Quante cifre significative? **3**.

0,000450

↓

meglio usare la notazione scientifica

$4{,}50 \times 10^{-4}$

1.3 Notazione scientifica

(Comodità di scrittura delle grandezze fisiche e identificazione delle cifre significative.)

Es.

$$c \approx 300\,000\,\text{km/s} = 3 \times 10^5\,\text{km/s}$$
$$R_{\oplus} \approx 6\,000\,\text{km} = 6 \times 10^3\,\text{km}$$
$$R_{\text{atomo}} \approx 10^{-10}\,\text{m}$$

Proprietà delle potenze:

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$(3 \times 10^5) \cdot (2 \times 10^3) = 6 \times 10^8$$

$$\frac{6 \times 10^8}{3 \times 10^2} = 2 \times 10^6$$

$$(10^{-2})^2 = 10^{-4}$$

$$(10^{-2})^3 = 10^{-6}$$

$$10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{-4}$$

Notazione scientifica e cifre significative

$100\,\mathrm{m/s}$ (non sappiamo dire se ci sono 1, 2 o 3 cifre significative)

$$\downarrow$$

$1 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$ (1 cifra significativa)
$1{,}0 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$ (2 cifre significative)
$1{,}00 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$ (3 cifre significative)

Invece per $5{,}0\,\mathrm{m/s}$ non ci sono ambiguità: sono 2 CS.

Importante:

① Nei calcoli, $0{,}50\,\mathrm{m/s} \neq \frac{1}{2}\,\mathrm{m/s}$.

② Gli arrotondamenti solo alla fine.
Es. La calcolatrice vi dà $L = 13{,}3578\,\mathrm{cm} \longrightarrow L = 13{,}4\,\mathrm{cm}$ (l'incertezza è di $0{,}1\,\mathrm{cm}$).
Se è un risultato finale, OK.
Non OK se è un risultato intermedio.

1.4 Ordine di grandezza

È la potenza di 10 più vicina al risultato numerico:

$$R_\oplus \approx 6\,300\,\mathrm{km} \approx 6{,}3 \times 10^3\,\mathrm{km} \longrightarrow 10^4\,\mathrm{km}$$

Es. Quanti secondi ci sono in 1 anno?

$$\begin{aligned}
1\text{ anno} &= 365\,\cancel{\text{giorno}} \times \underbrace{24\,\frac{\cancel{\text{h}}}{\cancel{\text{giorno}}}}_{\times 1} \times \underbrace{3600\,\frac{\text{s}}{\cancel{\text{h}}}}_{\times 1} \\
&= 365 \times 24 \times 3600\,\text{s} \\
&= 3{,}65 \times 10^2 \cdot 2{,}4 \times 10 \cdot 3{,}6 \times 10^3\,\text{s} \\
&= (3{,}65 \times 2{,}4 \times 3{,}6) \times 10^6\,\text{s} \\
&\approx 10^7\,\text{s}
\end{aligned}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

1.5 Il Sistema Internazionale (SI)

Grandezza fisica	Unità	Simbolo
Tempo	secondo	s
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K (non °K)
Quantità di sostanza	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

Prefissi

k $\equiv 10^3$	(chilo)	m $\equiv 10^{-3}$	(milli)
M $\equiv 10^6$	(mega)	$\mu \equiv 10^{-6}$	(micro)
G $\equiv 10^9$	(giga)	n $\equiv 10^{-9}$	(nano)
T $\equiv 10^{12}$	(tera)	p $\equiv 10^{-12}$	(pico)
P $\equiv 10^{15}$	(peta)	f $\equiv 10^{-15}$	(femto)

1 femtometro = 1 fm è la dimensione del nucleo atomico.

⋆ A seconda dell'ambito della fisica che si sta studiando, cambiano le unità di misura (si esce dal SI).

Come sono definite le unità di misura?

Si usano ora delle costanti della natura, a cui si assegna un valore esatto.

Costante definitoria	Simbolo	Valore esatto
Frequenza iperfine del cesio-133	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$
Velocità della luce nel vuoto	c	$299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Costante di Planck	h	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$
Carica elettrica elementare	e	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Costante di Boltzmann	k_B	$1{,}380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Costante di Avogadro	N_A	$6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

dove

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}, \qquad \text{coulomb: } \mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}.$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

1.6 Conversioni di unità

Es. $v = 72\,\text{km/h}$ non è nel SI.

$$v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow{\text{SI}} 72\,\frac{10^3\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \frac{72}{3{,}6}\,\text{m/s} = 20\,\text{m/s} = 2{,}0 \times 10\,\text{m/s}$$

Es. $a = 1\,\text{cm}^2 \xrightarrow{\text{SI}} a = 1\,(10^{-2}\,\text{m})^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2$

Es. $V = 1\,\text{cm}^3 \xrightarrow{\text{SI}} V = 1\,(10^{-2}\,\text{m})^3 = 10^{-6}\,\text{m}^3$

Es. Densità dell'acqua: $\rho_{H_2O} = 1\,\text{g/cm}^3 \xrightarrow{\text{SI}} \rho_{H_2O} =$

$$= 1 \cdot \frac{10^{-3}\,\text{kg}}{(10^{-2}\,\text{m})^3} = \frac{10^{-3}\,\text{kg}}{10^{-6}\,\text{m}^3} = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Es. $V = 1\,\text{dm}^3$ d'acqua: quanto pesa?

$$m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot V = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1\,\text{dm}^3 = 10^3\,\frac{\text{kg} \cdot \text{dm}^3}{\text{m}^3}$$
$$= 10^3\,\frac{\text{kg} \cdot \text{dm}^3}{(1\,\text{m})^3} = 10^3\,\frac{\text{kg} \cdot \text{dm}^3}{(1 \cdot 10\,\text{dm})^3} = 10^3\,\frac{\text{kg} \cdot \text{dm}^3}{(10\,\text{dm})^3}$$
$$= \cancel{10^3}\,\frac{\text{kg} \cdot \cancel{\text{dm}^3}}{\cancel{10^3}\,\cancel{\text{dm}^3}} = 1\,\text{kg}$$

1.7 Analisi dimensionale (equazioni dimensionali)

$[x] = L$ (spostamento) ; $[m] = M$ (massa) ; $[t] = T$ (tempo)

$\Rightarrow$ $[v] = L\,T^{-1}$ (velocità) ; $[a] = L\,T^{-2}$ (accelerazione) ; $[F] = M\,L\,T^{-2}$ (forza)

Omogeneità dimensionale: $x = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$

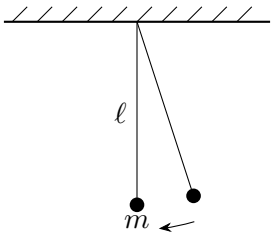
$$[x] = L$$
$$[a\,t^2] = [a]\,[t^2] = [a]\,[t]^2 = L\,T^{-2}\,T^2 = L$$
$$[v_0\,t] = [v_0]\,[t] = L\,T^{-1}\,T = L$$
$$[x_0] = L$$

Es. $x = v_0 + a\,t^2$

$$[x] = L$$
$$[v_0] = L\,T^{-1}$$
$$[a\,t^2] = L\,T^{-2}\,T^2 = L$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Esempio: il pendolo



$T \equiv$ periodo di oscillazione.

T si può esprimere in termini di ℓ (lunghezza del pendolo) e g (accelerazione di gravità sulla superficie della Terra):

$$T \propto \ell^{\alpha}\, g^{\beta}$$

$$\downarrow \text{ eq. dimensionale}$$

$$\underset{\substack{\| \\ \text{tempo}}}{[T]} = [\ell^{\alpha} g^{\beta}] = [\ell]^{\alpha}\,[g]^{\beta} = L^{\alpha}\left(L\,\text{tempo}^{-2}\right)^{\beta} = L^{\alpha}\,L^{\beta}\,\text{tempo}^{-2\beta} = L^{\alpha+\beta}\,\text{tempo}^{-2\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ non deve comparire a destra} \\ \text{tempo} = \text{tempo}^{-2\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T \propto \ell^{1/2}\, g^{-1/2} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T \propto \sqrt{\frac{\ell}{g}}} \qquad \left(\text{la relazione esatta è } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 2

Venerdì 25 settembre 2026

2.1 Ordini di grandezza, potenze di 10 e cifre significative

(Cifre significative e notazione scientifica sono introdotte nei §§ 1.2–1.3.)

Ordini di grandezza

Es.

Dimensione di un nucleo atomico: $d \simeq 10^{-15}\,\mathrm{m} \equiv 1\,\mathrm{fm}$ (fermi)

Dimensione di un atomo: $d \simeq 10^{-10}\,\mathrm{m} \equiv 1\,\text{Å}$ (ångström)

Unità di massa atomica: $m \simeq 10^{-24}\,\mathrm{g} \equiv 1$ uma $= 1$ dalton

Massa di una particella:

$$\underbrace{E = m\,c^2}_{\text{relazione massa-energia di Einstein}} \qquad m_p\,c^2 \simeq 1\,\mathrm{GeV}, \qquad 1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Distanza Terra–Sole: $d_{TS} \simeq 150\,000\,000\,\mathrm{km} \equiv 1\,\mathrm{UA}$

Anno luce: $1\,\mathrm{ly}$ = distanza percorsa dalla luce in un anno

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{ly} &= c \cdot \Delta t_{1\,\mathrm{yr}} = 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \times 1\,\mathrm{yr} \\ &= 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \times 3 \times 10^{7}\,\mathrm{s} = 3 \times 10^{5}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \times 3 \times 10^{7}\,\mathrm{s} \\ &= 9 \times 10^{12}\,\mathrm{km} \approx 10^{13}\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

$1\,\mathrm{pc} \approx 3{,}25\,\mathrm{ly} \longrightarrow \underbrace{\text{kpc, Mpc, Gpc}}_{\text{Cosmologia}}$

Potenze di 10

① $10^{p} \times 10^{q} = 10^{p+q}$ $\qquad (p,q \in \mathbb{Z})$

② $\dfrac{10^{p}}{10^{q}} = 10^{p-q}$. Infatti

$$\frac{1}{10^{q}} = 10^{-q} \quad \text{quindi:} \quad \frac{10^{p}}{10^{q}} = 10^{p} \times 10^{-q} = 10^{p-q}$$

③ $(10^{p})^{q} = 10^{pq}$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Cifre significative nelle operazioni

$$\Delta x = \underbrace{10{,}0\,\text{m}}_{3\text{ CS}}, \qquad \Delta t = \underbrace{3{,}0\,\text{s}}_{2\text{ CS}}, \qquad v_m = ?$$

(Attenzione: $1{,}0 \times 10\,\text{m}$ avrebbe invece 2 cifre significative.)

$$\begin{aligned} v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10{,}0\,\text{m}}{3{,}0\,\text{s}} &= \cancel{3{,}\overline{3}\,\text{m/s}} \\ &= 3{,}3\,|\,333\ldots\,\text{m/s} \\ &= 3{,}3\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Es. $0{,}0005\,\text{s} = 5 \times 10^{-4}\,\text{s}$ (1 CS)

2.2 Grandezze fisiche scalari e vettoriali — Sistemi di riferimento

Grandezza fisica scalare

È una grandezza caratterizzata da un solo numero.

Es. Temperatura: $T = 20\,^\circ\text{C}$, $T = 32\,^\circ\text{F}$, $T = 300\,\text{K}$

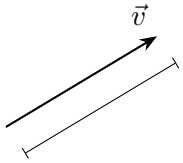
Es. Massa: $m = 50\,\text{kg}$

Es. Tempo: $\Delta t = 3\,\text{s}$, $\Delta t = 5{,}73\,\text{s}$, $\Delta t = 2{,}3\,\text{yr}$

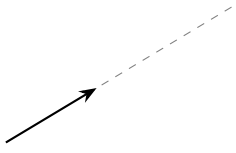
Grandezze fisiche vettoriali $\longrightarrow$ vettori

VETTORE: $\vec{v}$

- ⋆ modulo (lunghezza)
- ⋆ direzione
- ⋆ verso



lunghezza del vettore $|\vec{v}|$ = modulo di $\vec{v}$



retta su cui si trova il vettore ≡ direzione
(importanti in dimensioni spaziali > 1)

verso (da che parte sta la punta della freccia)

Es. Velocità in 2 o 3 dimensioni: $\vec{v}$, $|\vec{v}| = 50\,\text{km/h}$

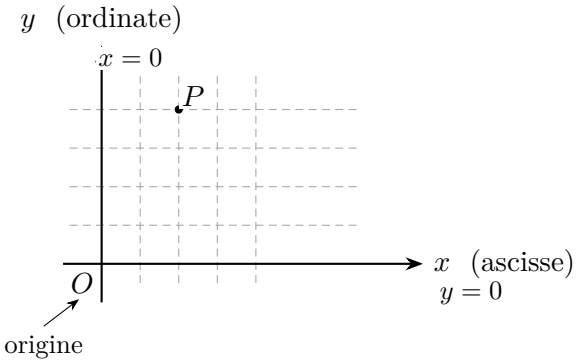
$$\begin{cases} \text{Direzione: NS} \\ \text{Verso: verso S} \longrightarrow \text{N} \to \text{S} \end{cases}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

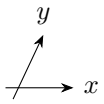
Es.

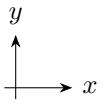
$$\vec{r} \equiv \text{posizione}, \qquad \vec{v} \equiv \text{velocità}, \qquad \vec{a} \equiv \text{accelerazione}$$

Sistema di riferimento

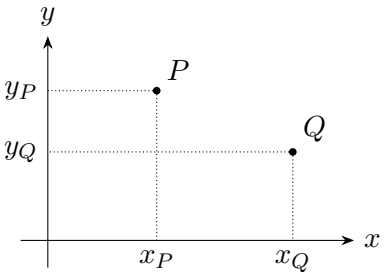


- ⋆ Partiamo da un punto O che è l'origine del sistema di riferimento: $O = (0,0) = (x = 0, y = 0)$.
- ⋆ Tracciamo una retta passante per O: asse x.
- ⋆ Per il sistema di riferimento cartesiano, tracciamo una retta $\perp$ all'asse x: asse y.

(potreste avere anche 

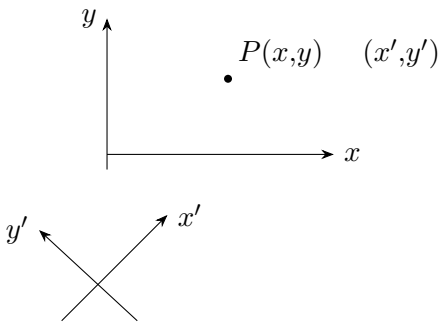
, ma è meno conveniente di 

)



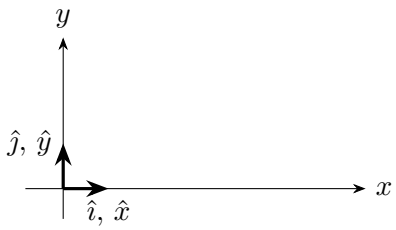
$P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$: due numeri individuano qualsiasi punto del piano.

Importante: la scelta dell'origine e dell'orientazione degli assi è arbitraria.



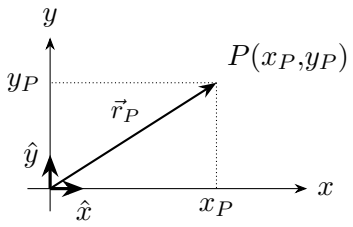
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Vettori nel piano cartesiano



$\hat{\imath}$, $\hat{x}$: <u>versore</u> = vettore unitario = vettore con modulo = 1: $|\hat{\imath}| = 1$.

$\hat{x}$ ci dà la direzione e il verso dell'asse x.
Similmente per $\hat{y}$.



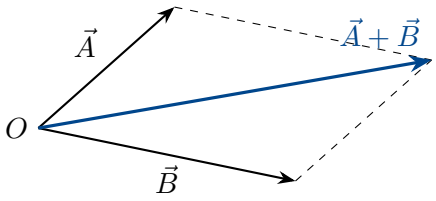
$$\boxed{\vec{r}_P = x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}}$$

$x_P \equiv$ componente x di $\vec{r}_P$
$y_P \equiv$ componente y di $\vec{r}_P$

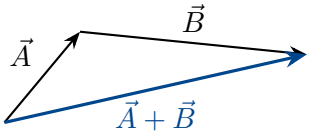
$\longrightarrow$ somma di 2 vettori $(x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y})$.

2.3 Operazioni con i vettori

Somma di 2 vettori

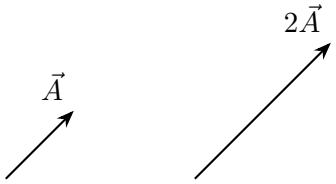


Regola del parallelogramma: la somma è la diagonale del parallelogramma.



Regola coda-punta: unite la coda del primo vettore alla punta del secondo.

Prodotto di un vettore per uno scalare



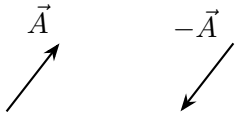
$|2\vec{A}| = 2\,|\vec{A}|$
moltiplicando $\times 2$ un vettore si moltiplica $\times 2$ il suo modulo

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$a\vec{A}$ $(a \in \mathbb{R})$: la direzione non cambia,

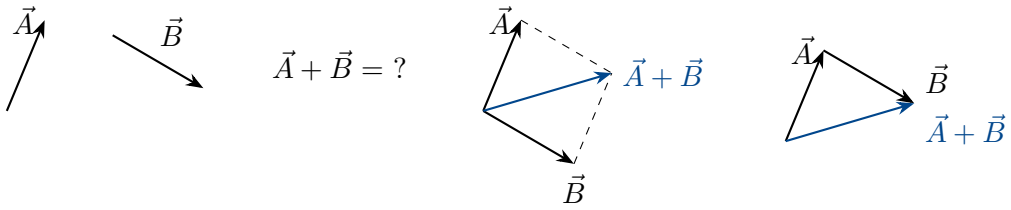
$$|a\vec{A}| = |a|\,|\vec{A}|,$$

il verso cambia se $a < 0$.

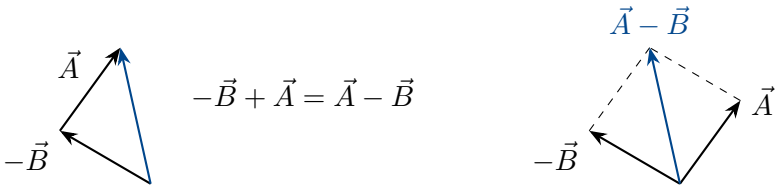


Differenza tra vettori

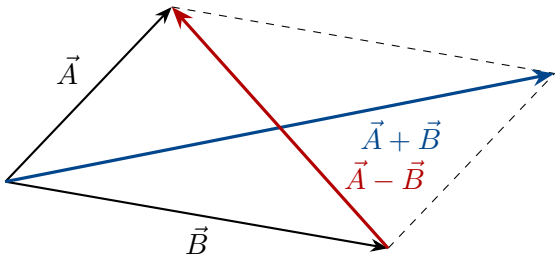
Definire $-\vec{A}$ ci permette anche di fare differenze tra vettori.



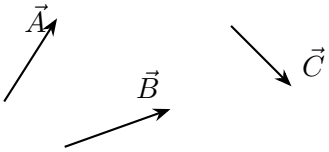
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



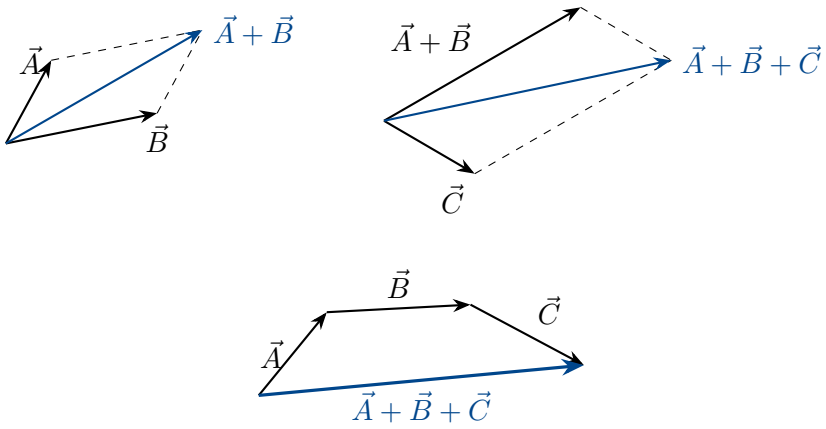
Usando la tecnica del parallelogramma, una diagonale è la somma dei due vettori e l'altra diagonale è la differenza.



Sommare più di 2 vettori



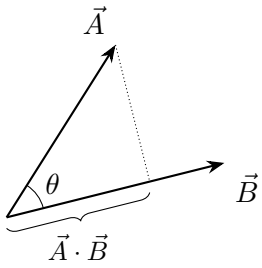
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



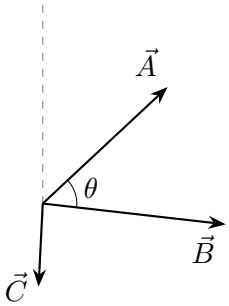
Altre operazioni con i vettori

① $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (**prodotto scalare**)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$



② $\vec{A}\times\vec{B}$ (**prodotto vettoriale**): $\vec{A}\times\vec{B}\equiv\vec{C}$ è un vettore.

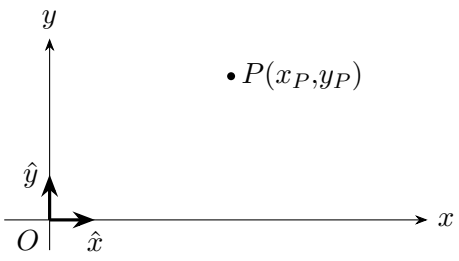


Modulo: $|\vec{C}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$

Direzione: $\perp$ al piano formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$

Verso: regola della mano destra.

2.4 Torniamo al sistema di riferimento cartesiano

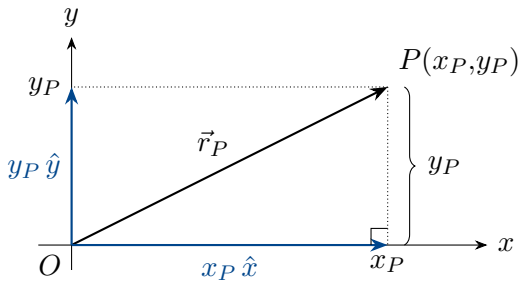


© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

($u \equiv$ unità di misura, se x è una grandezza fisica; stessa precisazione per y.)

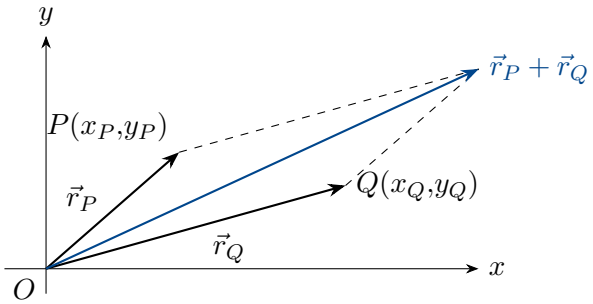
$$\boxed{\vec{r}_P = x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}}$$

è il **vettore posizione** del punto P; x_P e y_P sono le componenti di $\vec{r}_P$.



$$|\vec{r}_P| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \qquad \text{(teorema di Pitagora)}$$

Somma di vettori in componenti



$$\begin{aligned}\vec{r}_P + \vec{r}_Q &= (x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}) + (x_Q\,\hat{x} + y_Q\,\hat{y}) \\ &= x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y} + x_Q\,\hat{x} + y_Q\,\hat{y} \\ &= (x_P + x_Q)\,\hat{x} + (y_P + y_Q)\,\hat{y}\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si usa la proprietà distributiva del prodotto di uno scalare per un vettore).

Prodotto scalare in componenti

$\vec{r}_P \cdot \vec{r}_Q = ?$ (Qual è il prodotto scalare, in componenti?)

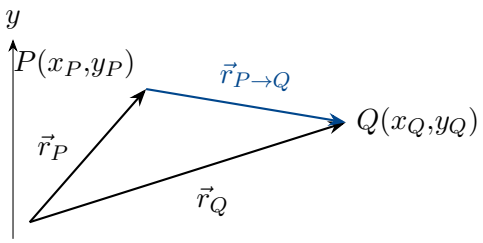
$$\begin{aligned}\vec{r}_P \cdot \vec{r}_Q &= (x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}) \cdot (x_Q\,\hat{x} + y_Q\,\hat{y}) \\ &= (x_P\,\hat{x}) \cdot (x_Q\,\hat{x}) + (x_P\,\hat{x}) \cdot (y_Q\,\hat{y}) + (y_P\,\hat{y}) \cdot (x_Q\,\hat{x}) + (y_P\,\hat{y}) \cdot (y_Q\,\hat{y}) \quad \text{(distributività)} \\ &= x_P x_Q\,(\hat{x} \cdot \hat{x}) + x_P y_Q\,(\hat{x} \cdot \hat{y}) + y_P x_Q\,(\hat{y} \cdot \hat{x}) + y_P y_Q\,(\hat{y} \cdot \hat{y}) \\ &= x_P x_Q + y_P y_Q\end{aligned}$$

(Somma dei prodotti delle componenti omologhe: infatti $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono versori, quindi $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = 1$, e sono perpendicolari, quindi $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{x} = 0$.)

Es.

$$\vec{r}_P \cdot \vec{r}_P = x_P x_P + y_P y_P = (x_P)^2 + (y_P)^2 = |\vec{r}_P|^2, \qquad \vec{r}_P = x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



$$\vec{r}_P = x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}$$
$$\vec{r}_Q = x_Q\,\hat{x} + y_Q\,\hat{y}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 3

Lunedì 28 settembre 2026

3.1 Operazioni con i vettori

Sia $\vec{A}$ un vettore.

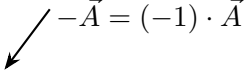
① Moltiplicazione per un numero (scalare)

Se $a \in \mathbb{R}$, $\underbrace{a\vec{A}}_{\text{è un nuovo vettore}}$:

I. $|a\vec{A}| = |a| \cdot |\vec{A}|$

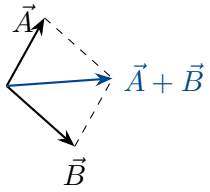
II. ha direzione uguale a quella di $\vec{A}$

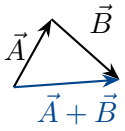
III. il verso è lo stesso di $\vec{A}$ se $a > 0$; se $a < 0$ il verso è opposto.

Es. 

② Somma di vettori

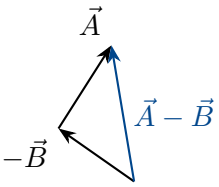
Siano e due vettori. $\vec{A} + \vec{B} = ?$

I. La regola del parallelogramma: 

II. Tecnica “coda-punta”: 

Corollario: sappiamo anche fare la differenza tra vettori. $\vec{A} - \vec{B} = ?$

$$\vec{A} + (-1) \cdot \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$$

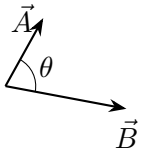


© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

③ Prodotti tra vettori

$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv$ **prodotto scalare**: combina due vettori per dare uno scalare,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta.$$

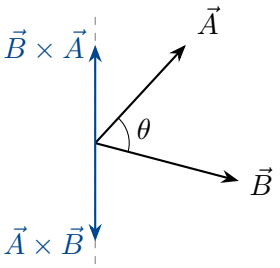


$\vec{A} \times \vec{B} \equiv$ **prodotto vettoriale**: combina due vettori per dare un altro vettore.

I. $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta$

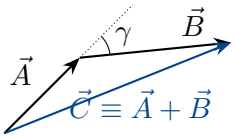
II. Direzione: $\perp$ al piano di $\vec{A}$ e $\vec{B}$

III. Verso: regola della mano destra



$\vec{B} \times \vec{A} = -\,\vec{A} \times \vec{B}$
(il prodotto vettoriale è *anticommutativo*)

Es.



$$\vec{C} \cdot \vec{C} = |\vec{C}|^2 \qquad (= C^2, \text{ un'altra notazione})$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$
$$= |\vec{A}|^2 + 2\,\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\,\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\gamma}$$

(teorema di Pitagora generalizzato)

3.2 Angoli e funzioni trigonometriche

$180^\circ = \pi$ radianti (rad) $\qquad (\pi = 3{,}14\ldots)$
$360^\circ = 2\pi$ rad
$30^\circ = \pi/6$ rad

$$\boxed{\theta(^\circ) : 180^\circ = \theta(\text{rad}) : \pi}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

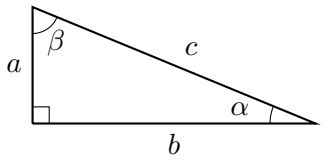
$$\frac{\pi}{6}: \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}: \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{2}: \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \infty$$

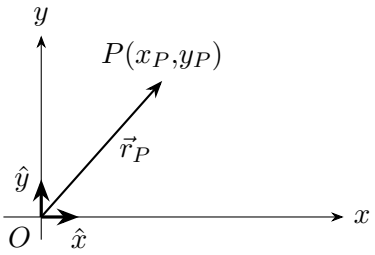
$$\pi: \quad \sin(\pi) = 0, \quad \cos(\pi) = -1 \qquad \tan(\pi) = 0$$

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a = b\tan\alpha$$
$$a = c\cos\beta = c\sin\alpha$$

3.3 Sistema di riferimento cartesiano



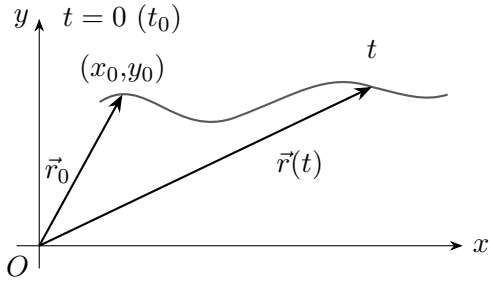
$\hat{x} \perp \hat{y} \quad (\hat{x}\cdot\hat{y} = 0)$

$(x_P, y_P) \equiv$ coordinate del punto P
$\equiv$ componenti del vettore $\vec{r}_P$

$\vec{r}_P = x_P\,\hat{x} + y_P\,\hat{y}$ $\quad = $ vettore posizione del punto P.

3.4 Cinematica del punto

Cinematica del punto $\equiv$ descrizione del movimento di una particella puntiforme.



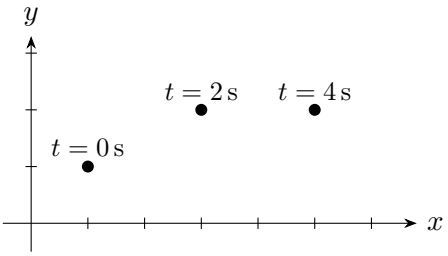
Si muove lungo una certa traiettoria
$\Downarrow$
la sua posizione varia nel tempo.

$\vec{r}_0 = x_0\,\hat{x} + y_0\,\hat{y}$ $\quad \equiv$ vettore posizione al tempo $t = 0$
$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}$ $\quad \equiv$ vettore posizione al tempo t (generico)

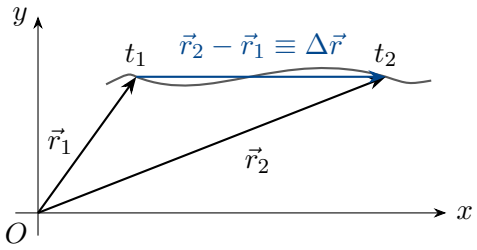
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es.

t [s]	x [m]	y [m]
0	1	1
2	3	2
4	5	2



Velocità media



$\Delta\vec{r} \equiv$ spostamento $= \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\Delta t \equiv$ intervallo di tempo $= t_2 - t_1$

$$\boxed{\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \quad \text{velocità media}$$

$|\Delta\vec{r}| =$ distanza percorsa.[1]

$$[\Delta\vec{r}] = \text{Lunghezza (m)}, \qquad [\Delta t] = \text{Tempo (s)}, \qquad [\vec{v}_m] = \frac{L}{T}\ \text{(m/s)}$$

Es.

$$A = (1{,}2)\,\text{m} = (1\,\text{m},\, 2\,\text{m}), \qquad t_A = 5\,\text{s}$$
$$B = (5{,}5)\,\text{m} = (5\,\text{m},\, 5\,\text{m}), \qquad t_B = 7\,\text{s}$$

$\Delta\vec{r} = ?$ $\quad |\Delta\vec{r}| = ?$ $\quad \vec{v}_m = ?$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A &= x_B\,\hat{x} + y_B\,\hat{y} - (x_A\,\hat{x} + y_A\,\hat{y}) \\ &= (x_B - x_A)\,\hat{x} + (y_B - y_A)\,\hat{y} \\ &= 4\,\text{m}\,\hat{x} + 3\,\text{m}\,\hat{y} = (4\,\hat{x} + 3\,\hat{y})\,\text{m}\end{aligned}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(4\,\text{m})^2 + (3\,\text{m})^2} = \sqrt{16\,\text{m}^2 + 9\,\text{m}^2} = \sqrt{(16+9)\,\text{m}^2} = \sqrt{25}\,\text{m} = 5\,\text{m}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(4\,\hat{x} + 3\,\hat{y})\,\text{m}}{t_B - t_A} = \frac{(4\,\hat{x} + 3\,\hat{y})\,\text{m}}{7\,\text{s} - 5\,\text{s}} = \frac{(4\,\hat{x} + 3\,\hat{y})\,\text{m}}{2\,\text{s}} \\ = \left(2\,\hat{x} + \tfrac{3}{2}\,\hat{y}\right)\,\text{m/s}\end{aligned}$$

↓ se avessimo 1 cifra significativa, si scriverebbe 2: $\frac{3}{2} = 1{,}50000\ldots \approx 2$.

Domanda: vado a Genova (200 km) impiegando 2 h. Qual è la velocità media?

$$\Delta x = 200\,\text{km}, \quad \Delta t = 2\,\text{h} \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 100\,\text{km/h}$$

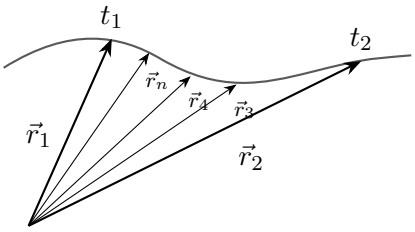
[1] Più precisamente, $|\Delta\vec{r}|$ è la distanza in linea retta tra la posizione iniziale e quella finale; coincide con la distanza percorsa lungo la traiettoria solo se il moto è rettilineo e senza inversioni.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Velocità istantanea

Qual è la velocità in t_1? Prendiamo t_2, calcoliamo $t_2 - t_1 = \Delta t_1$ e $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_1$:

$$\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t_1} \quad \text{velocità media tra } t_1 \text{ e } t_2.$$



avviciniamo progressivamente il secondo vettore posizione al primo.

$$\boxed{\vec{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \quad \text{velocità istantanea in } t_1.$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

La velocità istantanea in t è la derivata temporale di $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{y}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\hat{x} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\hat{y} \quad \text{(accelerazione istantanea)}$$

Es. $x(t) = 3t$; $y(t) = t^2$ (legge oraria)

$$\vec{r}(t) = (3t)\,\hat{x} + (t^2)\,\hat{y} \quad \text{m}$$
$$\vec{v}(t) = 3\,\hat{x} + 2t\,\hat{y} \quad \text{m/s}$$
$$\vec{a}(t) = 2\,\hat{y} \quad \text{m/s}^2$$

Regole di derivazione

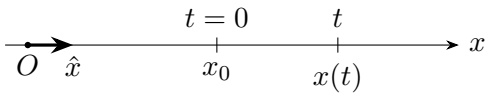
①	$x(t) = \text{costante}$	$\frac{dx(t)}{dt} = 0$
②	$x(t) = t^n$	$\frac{dx(t)}{dt} = n\,t^{n-1}$
③	$x(t) = e^t$	$\frac{dx(t)}{dt} = e^t$
④	$x(t) = \sin t$	$\frac{dx(t)}{dt} = \cos t$
⑤	$x(t) = \cos t$	$\frac{dx(t)}{dt} = -\sin t$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

3.5 Moto rettilineo uniforme (1 dimensione)

$a = 0$, $v =$ costante, $\boxed{x(t) = x_0 + v\,t}$, $x_0 = x(t=0) \equiv$ posizione iniziale

$$\frac{dx(t)}{dt} = v$$



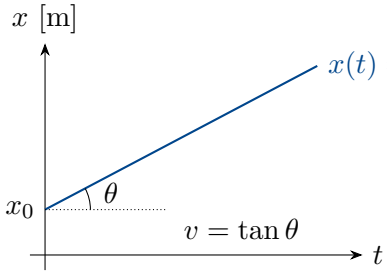
Es. $x_0 = 20\,\text{m}$, $v = 15\,\text{m/s}$. Qual è $x(t)$ con $t = 8\,\text{s}$?

$$x(t = 8\,\text{s}) = 20\,\text{m} + 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8\,\text{s} = 20\,\text{m} + 120\,\text{m} = 140\,\text{m}$$

Rifacciamolo bene, tenendo conto delle cifre significative:

$$t = 8{,}0\,\text{s}, \qquad x_0 = 2{,}0 \times 10\,\text{m}, \qquad v = 15\,\text{m/s} = 1{,}5 \times 10\,\text{m/s}$$

$$\begin{aligned} x(t = 8{,}0\,\text{s}) &= 2{,}0 \times 10\,\text{m} + 1{,}5 \times 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8{,}0\,\text{s} \\ &= 1{,}4 \times 10^2\,\text{m} \end{aligned}$$



(non è il sistema di riferimento, ma un grafico del moto)

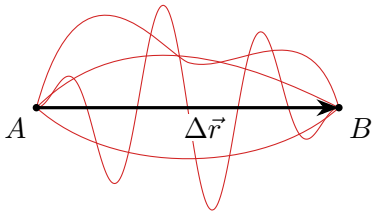
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 4

Venerdì 2 ottobre 2026

4.1 Velocità media e traiettoria

La velocità media $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ (§ 3.4) dipende solo dallo spostamento $\Delta\vec{r}$ e dall'intervallo di tempo Δt, non dalla traiettoria percorsa.



vari tipi di traiettorie
per lo stesso spostamento.

$\Delta t = t_B - t_A$

Per ognuna delle traiettorie in rosso, $\vec{v}_m$ è la stessa. Cambia però la velocità istantanea.

Es.

$$A = (1,1)\,\text{m}, \qquad t_A = 3\,\text{s}$$
$$B = (10,3)\,\text{m}, \qquad t_B = 10\,\text{s}$$

Determinare $\vec{v}_m$.

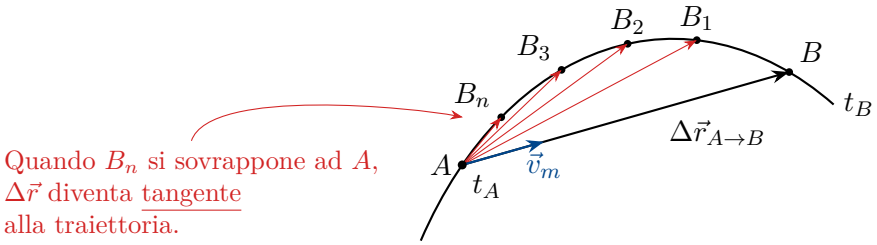
$$\Delta t = t_B - t_A = 10\,\text{s} - 3\,\text{s} = 7\,\text{s}$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (10\,\hat{x} + 3\,\hat{y})\,\text{m} - (1\,\hat{x} + 1\,\hat{y})\,\text{m} = (9\,\hat{x} + 2\,\hat{y})\,\text{m}$$

Quindi:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(9\,\hat{x} + 2\,\hat{y})\,\text{m}}{7\,\text{s}} = \left(\frac{9}{7}\,\hat{x} + \frac{2}{7}\,\hat{y}\right)\,\text{m/s}, \qquad |\vec{v}_m| = \left[\left(\tfrac{9}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{7}\right)^2\right]^{1/2}\,\text{m/s}$$

4.2 Velocità istantanea

$\vec{v}(t)$ è la velocità del punto all'istante t.



Quando B_n si sovrappone ad A,
$\Delta\vec{r}$ diventa tangente
alla traiettoria.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}_{A\to B}}{\Delta t}, \qquad \Delta t = t_B - t_A$$

Per ogni B_n si calcola spostamento e intervallo di tempo ⇒ nuove velocità medie.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$\vec{v}(t_A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\vec{r}_n}{\Delta t_n}, \qquad \begin{matrix}\Delta\vec{r}_n = \vec{r}_{B_n} - \vec{r}_A \\ \Delta t_n = t_{B_n} - t_A\end{matrix} \qquad (B_n \to A \text{ quando } n \to \infty)$$

In generale:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \quad \text{velocità istantanea}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}} \quad \text{accelerazione istantanea}$$

Es. In una dimensione (x).

$$\Delta x = x_B - x_A$$
$$\Delta t = t_B - t_A$$
$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$x(t) \equiv$ legge oraria (conoscere la posizione a ogni t)

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \left(= \frac{d}{dt}\,x(t), \text{ la derivata è un operatore lineare}\right)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Per esempio, se $x(t) = c_1\, t^3$ m:

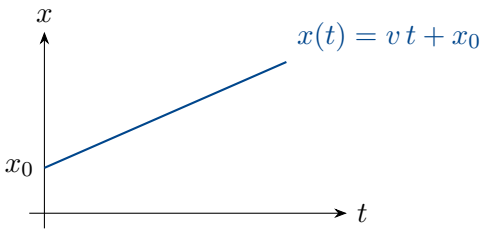
$$v(t) = c_1\, 3t^2 \text{ m/s} = 3c_1\, t^2 \text{ m/s}$$
$$a(t) = 6c_1\, t \text{ m/s}^2$$
$$\frac{da(t)}{dt} = 6c_1 \text{ m/s}^3$$

$$[c_1] = \frac{L}{T^3}$$

4.3 Moto rettilineo uniforme

$$v(t) = v = \text{costante}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v \;\Rightarrow\; dx = v\,dt \;\Rightarrow\; \int dx = \int v\,dt \;\Rightarrow\; \boxed{x(t) = v\,t + x_0} \qquad x_0 = x(t=0)$$



Es. Due moti rettilinei uniformi.

Macchina A: parte da $x_{0A} = 200$ m con $v_A = 100$ km/h

Macchina B: parte da $x_{0B} = 0$ m con $v_B = 200$ km/h

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Per quale t, B raggiunge A?

$$x_A(t) = v_A\,t + x_{0A}, \qquad x_B(t) = v_B\,t + x_{0B}$$

Bisogna uguagliare x_A e x_B. Definiamo t_I come quello per cui

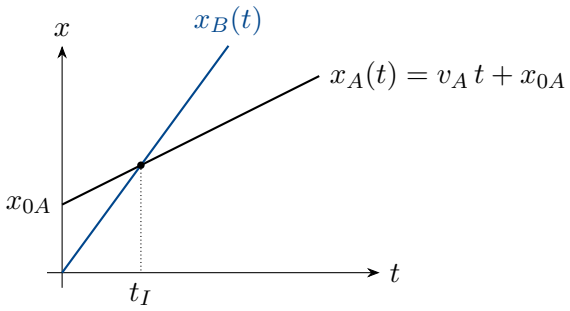
$$x_A(t_I) = x_B(t_I).$$

Quindi:

$$v_A\,t_I + x_{0A} = v_B\,t_I + x_{0B} \;\Rightarrow\; v_A\,t_I - v_B\,t_I = -x_{0A} + x_{0B} \;\Rightarrow\; \boxed{t_I = \frac{x_{0B} - x_{0A}}{v_A - v_B}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} t_I &= \frac{0\,\text{m} - 200\,\text{m}}{100\,\text{km/h} - 200\,\text{km/h}} = \frac{-200}{-100}\,\frac{\text{m}}{\text{km/h}} \\ &= 2 \times 10^{-3}\,\text{h} \\ &= 2 \times 10^{-3} \times 3{,}6 \times 10^{3}\,\text{s} = 7{,}2\,\text{s} \end{aligned}$$



4.4 Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a(t) = a = \text{costante}, \qquad \frac{dv(t)}{dt} = a$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= a\,t + v_0 \\ x(t) &= \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} v_0 &\equiv v(t=0) \\ x_0 &\equiv x(t=0) \end{aligned}$$

Possiamo "eliminare" il tempo dalle due equazioni. Ricaviamo t dalla prima equazione:

$$v = a\,t + v_0 \;\Rightarrow\; v - v_0 = a\,t \;\Rightarrow\; \frac{v - v_0}{a} = t$$

Sostituiamo $t = \dfrac{v - v_0}{a}$ nella seconda equazione:

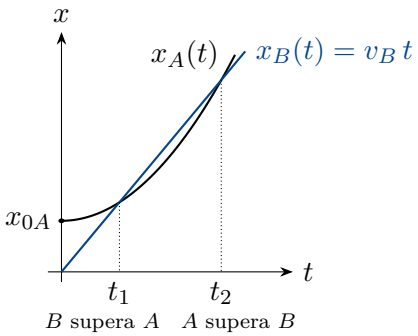
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0 \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{1}{2}\,a\,\frac{v^2 + v_0^2 - 2v\,v_0}{a^2} + \frac{v_0\,v - v_0^2}{a} + x_0 \\ \Rightarrow \quad 2a\,(x - x_0) &= v^2 + v_0^2 - \cancel{2v\,v_0} + \cancel{2v_0\,v} - 2v_0^2 \end{aligned}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$\Rightarrow \qquad \boxed{v^2 = 2a\,(x - x_0) + v_0^2}$$

Es.

$$\begin{aligned} &\text{Auto } A: \quad x_A(t) = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + x_{0A} \\ &\text{Auto } B: \quad x_B(t) = v_B\,t \end{aligned}$$



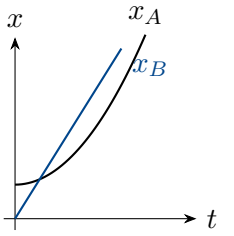
Mettiamo $x_A = x_B$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + x_{0A} = v_B\,t \\ \Rightarrow \quad &\tfrac{1}{2}\,a\,t^2 - v_B\,t + x_{0A} = 0 \end{aligned} \qquad \left(ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

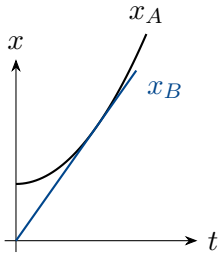
$$t_{1,2} = \frac{v_B \pm \sqrt{v_B^2 - 2a\,x_{0A}}}{a}$$

Quindi B supera A al tempo t_1 e A supera B al tempo t_2:

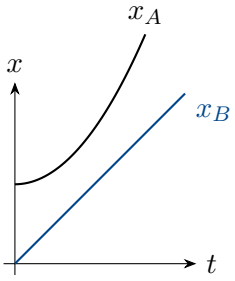
$$\boxed{t_1 = \frac{v_B - \sqrt{v_B^2 - 2a\,x_{0A}}}{a}, \qquad t_2 = \frac{v_B + \sqrt{v_B^2 - 2a\,x_{0A}}}{a}}$$



$t_1 < t_2$ se $v_B^2 > 2a\,x_{0A}$



$t_1 = t_2$ se $v_B^2 = 2a\,x_{0A}$

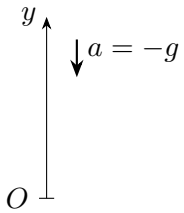


t_1 e t_2 non esistono se $v_B^2 < 2a\,x_{0A}$

4.5 Caduta libera

È un moto uniformemente accelerato, con $|a| = g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

$$\left(g = G\,\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}; \qquad G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}, \quad M_\oplus \simeq 10^{24}\,\mathrm{kg}, \quad R_\oplus \simeq 6 \times 10^3\,\mathrm{km} \right)$$

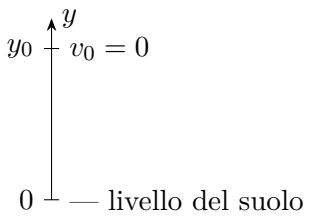


$$\begin{aligned} v &= -g\,t + v_0 \\ y &= -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + y_0 \end{aligned}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Per un oggetto lasciato cadere da fermo ($v_0 = 0$) da un'altezza $h \equiv y_0$:

$$v = -g\,t$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h$$



Tempo di caduta: t_c è tale che $y(t_c) = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2}\,g\,t_c^2 + h \;\Rightarrow\; \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

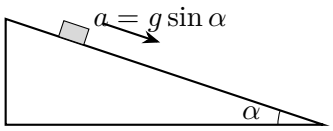
La velocità finale è $v_c = -g\,t_c \;\Rightarrow\; |v_c| = \sqrt{2gh}$.

Es. $h = 20\,\mathrm{m}$

$$t_c = \sqrt{\frac{2 \times 20\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} \approx \sqrt{4}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$$
$$v_c = \sqrt{2 \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 20\,\mathrm{m}} \approx \sqrt{400}\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$$

$g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \equiv$ ogni secondo la velocità aumenta di $9{,}8\,\mathrm{m/s} \approx 35\,\mathrm{km/h}$.

Piano inclinato (Galileo)



Permette di studiare il moto uniformemente accelerato (la caduta libera avviene con accelerazione g, troppo grande).

4.6 Moto armonico

▶ **Animazione interattiva**: moto armonico di una massa attaccata a una molla

$$x(t) = x_{\max}\cos(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{fase}})$$

Ponendo $\varphi = 0$ (scegliendo t_0 opportunamente):

$$x(t) = x_{\max}\cos(\omega t)$$

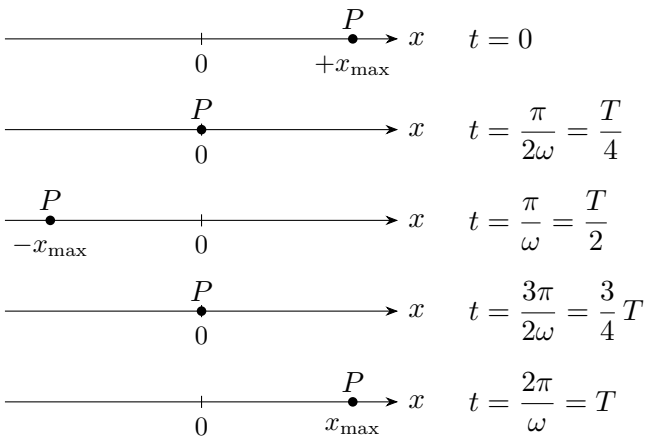
$\omega =$ frequenza angolare $= \dfrac{2\pi}{T}$

$T \equiv$ periodo di oscillazione

$x_{\max} \equiv$ massimo del modulo dello spostamento

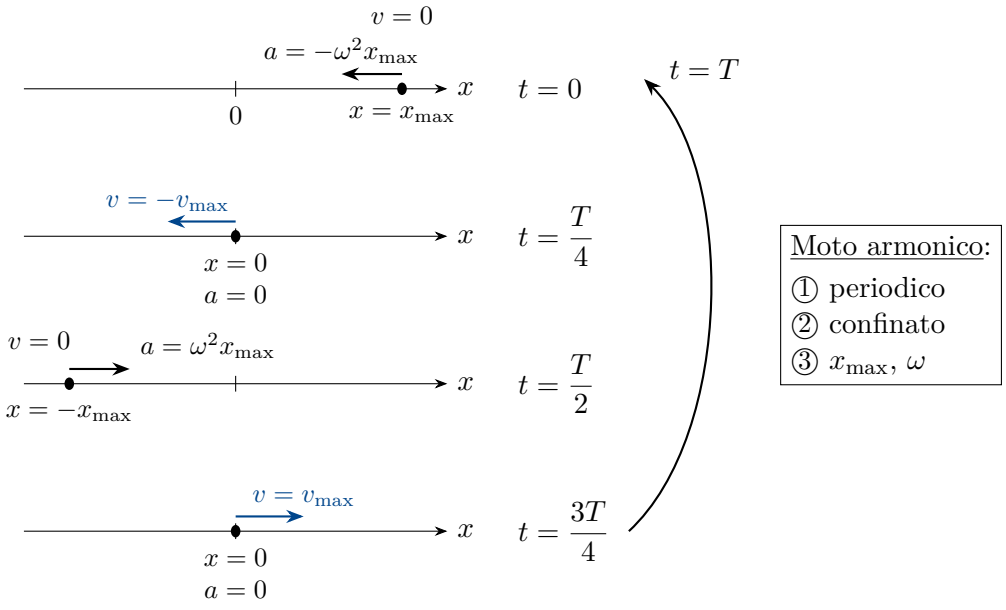
$f = \dfrac{1}{T} \equiv$ numero di oscillazioni al secondo, $\qquad [f] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



Data $x(t) = x_{\max} \cos(\omega t)$, la velocità è

$$v(t) = -\underbrace{\omega\, x_{\max}}_{v_{\max}} \sin(\omega t) = -v_{\max} \sin(\omega t)$$



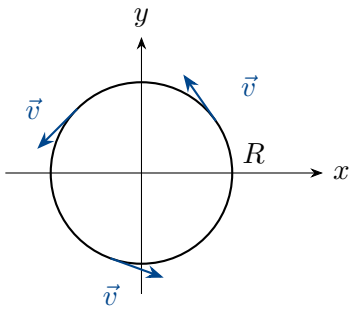
Moto armonico:
① periodico
② confinato
③ $x_{\max}$, ω

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t)$$
$$v(t) = -\omega\, x_{\max} \sin(\omega t)$$
$$a(t) = -\omega^2 x_{\max} \cos(\omega t) = -\omega^2\, x(t)$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

4.7 Moti in 2d

Moto circolare uniforme



$|\vec{v}|$ = costante

Tuttavia: direzione e verso cambiano nel tempo.

Dato che $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$ esiste un'accelerazione (è detta **accelerazione centripeta**).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 5

Lunedì 5 ottobre 2026

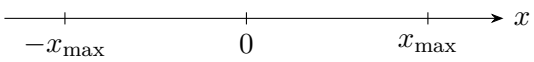
5.1 Scelta dell'origine del tempo e fase del moto armonico

Nelle leggi orarie dei moti rettilinei (§§ 4.3–4.4) l'origine del tempo è $t = 0$. Scegliendo invece $t = t_0$:

$$\underbrace{\begin{aligned} x(t) &= v\,(t - t_0) + x_0 \qquad (x(t_0) = x_0) \\ x(t) &= \tfrac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + x_0 \\ v(t) &= a\,(t - t_0) + v_0 \end{aligned}}_{\text{per i moti rettilinei}}$$

Per il moto armonico (§ 4.6), in generale si ha:

$$x(t) = x_{\max}\cos(\omega t + \varphi), \qquad \varphi \equiv \text{fase}$$



In $t = 0$: $\quad x(t = 0) = x_{\max}\cos(\varphi) \equiv x_0$

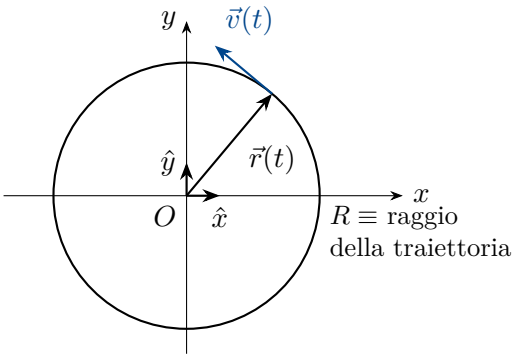
$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \quad x_0 = x_{\max} \\ \varphi &= \tfrac{\pi}{2}, \quad x_0 = 0 \\ \varphi &= \pi, \quad x_0 = -x_{\max} \end{aligned}$$

Scelta di $\varphi \equiv$ scelta di t_0:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\max}\cos\big[\omega\,(t - t_0) + \varphi\big] \\ &= x_{\max}\cos\big(\omega t \underbrace{- \omega t_0 + \varphi}_{\tilde{\varphi}\ \equiv\ \text{nuova fase}}\big) \end{aligned}$$

5.2 Moto circolare uniforme (moto in 2 dimensioni)

▶ **Animazione interattiva**: moto circolare uniforme, con $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ e le proiezioni sugli assi



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

$$\boxed{\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

In questo tipo di moto:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}, \qquad \begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t) \\ y(t) &= R\sin(\omega t) \end{aligned}$$

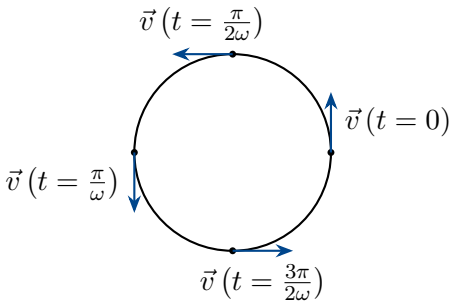
$\equiv$ proiettato sui diametri, il moto circolare uniforme è **armonico**.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} = \underbrace{-R\,\omega\sin(\omega t)}_{v_x(t)}\,\hat{x} + \underbrace{R\,\omega\cos(\omega t)}_{v_y(t)}\,\hat{y}$$

In Fisica, la derivata temporale si indica spesso con un punto: $\dot{x}(t) \equiv \dfrac{dx(t)}{dt}$.

$$|\vec{r}(t)|^2 = R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t) = R^2\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] = R^2$$
$$|\vec{v}(t)|^2 = v_x^2(t) + v_y^2(t) = R^2\omega^2\sin^2(\omega t) + R^2\omega^2\cos^2(\omega t) = R^2\omega^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{|\vec{v}(t)| = \omega R} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{|\vec{v}(t)|}{R}$$

Attenzione! $|\vec{v}(t)|$ è costante, ma $\vec{v}(t)$ no.



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}(t) = &-R\,\omega\sin(\omega t)\,\hat{x} \\ &+ R\,\omega\cos(\omega t)\,\hat{y}\end{aligned}}$$

Come per il moto armonico:

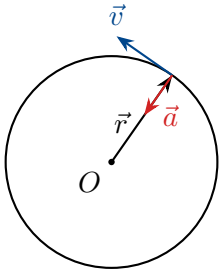
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad T \equiv \text{periodo} \equiv \text{tempo impiegato a fare un giro.}$$

Mostriamo che $\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{r} \perp \vec{v}$, $\forall t$:

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{v} &= R\cos(\omega t)\cdot\left[-R\,\omega\sin(\omega t)\right] + R\sin(\omega t)\cdot\left[R\,\omega\cos(\omega t)\right] \\ &= -R^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) + R^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0\end{aligned}$$

Accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= -R\,\omega^2\cos(\omega t)\,\hat{x} - R\,\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{y} \\ &= -\omega^2\,\vec{r}(t) \qquad \text{(ACCELERAZIONE CENTRIPETA)}\end{aligned}$$

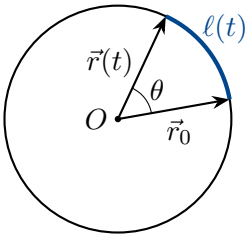


$\vec{r} \parallel \vec{a}$
$\vec{r} \perp \vec{v}$
$\vec{v} \perp \vec{a}$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 |\vec{r}(t)| = \omega^2 R = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}$$

$\omega \equiv$ frequenza angolare o, in questo caso, velocità angolare.
$\vec{v} \equiv$ velocità tangenziale.



$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\theta(t) = \frac{\ell(t)}{R} \qquad \left[\ell(t) \equiv \text{arco di circonferenza percorso in } t - t_0\right]$$

Es. $R = 2\,\text{m}$; $v = 4\,\text{m/s}$; $\omega = \dfrac{v}{R} = 2\,\text{rad/s}$.

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 8\,\text{m/s}^2, \qquad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\,\text{s}$$

5.3 Moto circolare uniforme con i soli vettori

Possiamo vedere lo stesso moto usando solo i vettori:

$\vec{r}(t)$: $\quad |\vec{r}(t)| = R \quad \forall t$ (questa condizione stabilisce che il moto è circolare)

$|\vec{v}(t)| =$ costante (condizione di uniformità del moto)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$|\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = R^2$. Deriviamo questa relazione:

$$\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{r}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0}$$

la velocità è perpendicolare alla posizione.

Facciamo la stessa cosa per l'accelerazione: $|\vec{v}(t)|^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = v^2$ e prendiamo la derivata:

$$\vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) = 0 \qquad \text{(perché } v^2 \text{ è costante: il moto è uniforme)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0}$$

l'accelerazione è perpendicolare alla velocità.

Il moto circolare uniforme può essere descritto come

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

cioè come composizione di due moti armonici.

5.4 Composizione di due moti

Un moto in 2 dimensioni può essere scomposto in 2 moti in una dimensione, uno lungo x e l'altro lungo y.

$$\Downarrow$$

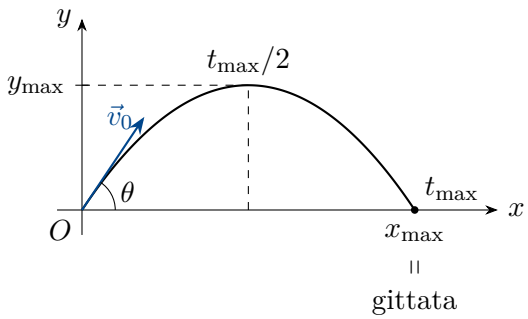
Si studiano separatamente i due moti e poi li si somma vettorialmente.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

5.5 Moto parabolico

▶ **Animazione interattiva**: moto parabolico con v_0 e θ regolabili

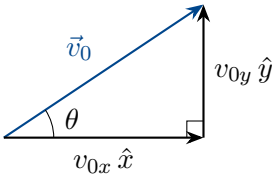
Moto uniforme lungo x + moto di caduta libera lungo y.



$$\vec{r}(t) = \underbrace{x(t)}_{\substack{\text{moto rettilineo}\\ \text{uniforme}}}\hat{x} + \underbrace{y(t)}_{\text{caduta libera}}\hat{y}$$

Scegliamo $x_0 = y_0 = 0$:

$$x(t) = v_{0x}\,t + x_0 = v_0 \cos\theta\, t$$



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0y}\,t + y_0 = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\theta\, t$$

Dalla prima equazione (legge oraria del moto lungo x):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Sostituendo nella seconda equazione (legge oraria del moto lungo y):

$$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}\,x^2 + \tan\theta\, x} \qquad \text{equazione di una parabola nel piano cartesiano}$$

Gittata

Quando poniamo $y = 0$ otteniamo:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}\,x^2 + \tan\theta\, x = 0$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Una soluzione (banale) è $x = 0$. L'altra è la gittata: $x \neq 0$, dividiamo per x:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\,\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}\,x_{\max} + \tan\theta = 0 \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{2}\,\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}\,x_{\max} = \tan\theta \\ \Rightarrow\quad & g\,x_{\max} = 2\,(v_0\cos\theta)^2\tan\theta \\ \Rightarrow\quad & x_{\max} = \frac{2\,(v_0\cos\theta)^2\tan\theta}{g} = \frac{2\,v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g} \qquad \left(\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \\ & \Rightarrow\quad \boxed{x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)} \quad \text{gittata.} \end{aligned}$$

È massima per $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e vale $\dfrac{v_0^2}{g}$.

Altezza massima raggiunta

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\theta\,t$$

Poniamo $y = 0$: abbiamo $t = 0$ e

$$-\tfrac{1}{2}\,g\,t_{\max} + v_0\sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}\,g\,t_{\max} = -v_0\sin\theta \;\Rightarrow\; \boxed{t_{\max} = \frac{2\,v_0\sin\theta}{g}}$$

tempo impiegato dal proiettile per arrivare a $x_{\max}$.

$$t_{y_{\max}} = \frac{t_{\max}}{2} = \frac{v_0\sin\theta}{g}$$

perché il moto parabolico è simmetrico rispetto a questo istante.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & y_{\max} = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2 + v_0\sin\theta\,\frac{v_0\sin\theta}{g} \\ \Rightarrow\quad & y_{\max} = -\frac{1}{2}\,\frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} \\ & \Rightarrow\quad \boxed{y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}} \end{aligned}$$

Altro modo:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\theta\,t \\ v_y(t) &= -g\,t + v_0\sin\theta \end{aligned}$$

Questa è zero nel punto $y_{\max} \Rightarrow t_{y_{\max}} = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$.

Es. $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, $\theta = 30°$ $(g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2})$.

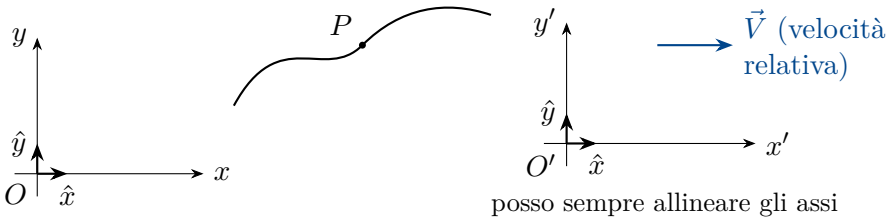
$$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \simeq \frac{(20\,\mathrm{m/s})^2\,(1/4)}{2\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 5\,\mathrm{m}$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) = 40\,\mathrm{m}\,\sin(2\theta) \simeq 40\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m} \simeq 35\,\mathrm{m}$$

Se $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $(45°)$: $x_{\max} = 40\,\mathrm{m}$.

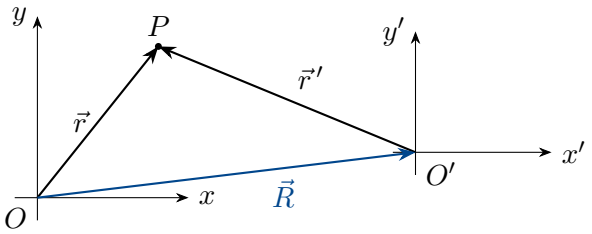
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

5.6 Moti relativi



posso sempre allineare gli assi

Consideriamo un istante t generico:



$\vec{R} \equiv$ posizione di O' rispetto a O

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}}$$

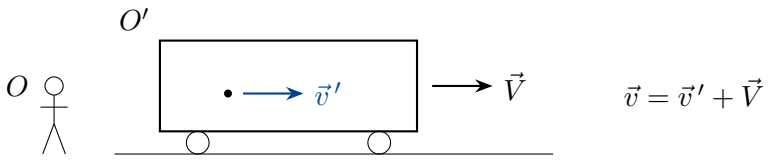
Quindi, derivando rispetto al tempo:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \\ \vec{v}\,'(t) &= \vec{v}(t) - \vec{V}(t) \\ \vec{a}\,'(t) &= \vec{a}(t) - \vec{A}(t) \end{aligned}} \qquad \text{moto relativo}$$

dove $\vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$ e $\vec{A} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$.

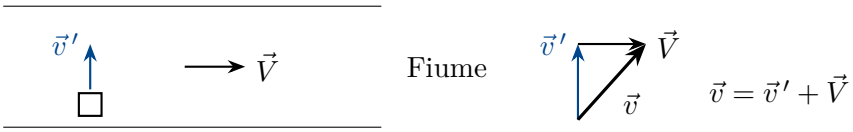
Se $\vec{V} =$ costante, i due sistemi di riferimento sono detti **inerziali**.
$\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t)$ è anche nota come LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ DI GALILEO.

Es. Un osservatore O' si trova su un vagone che si muove con velocità $\vec{V}$ rispetto all'osservatore O, fermo a terra. Una persona sul vagone si muove con velocità $\vec{v}\,'$ rispetto a O'.



$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$

Es. Una barca attraversa un fiume: la barca si muove con velocità $\vec{v}\,'$ rispetto all'acqua, la corrente ha velocità $\vec{V}$ rispetto alla riva.



$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

5.7 Dinamica

Dinamica: studio delle cause del moto (**forze**).

Newton (1687): *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ovvero "Principi matematici della filosofia naturale" (la filosofia naturale è la *fisica*).

Definizioni:

$m \equiv$ massa di un corpo (particella puntiforme)
proprietà intrinseca della materia

$m\,\vec{v} \equiv \vec{p} \equiv$ quantità di moto (momento lineare) (è una quantità conservata in assenza di forze)

$\vec{F} \equiv$ forza

Leggi di Newton

① **Principio (legge) d'inerzia.** Se $\vec{F} = \vec{0}$ su m, allora m si muove di moto rettilineo uniforme (o è ferma, se $\vec{v} = \vec{0}$).

② $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Applicando $\vec{F}$ a una massa m, la si accelera. L'accelerazione è $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

La formulazione più generale (l'originale) è:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad \text{se } m \text{ è costante:} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}$$

③ **Azione e reazione.**

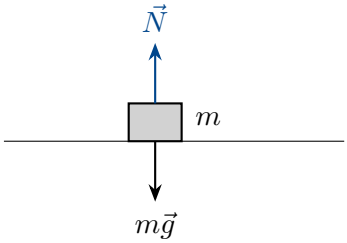
$\vec{F}_{A\to B} \equiv$ forza esercitata da A su B.

Anche B esercita su A una forza, $\vec{F}_{B\to A}$, che ha modulo e direzione uguali a $\vec{F}_{A\to B}$, ma verso opposto:

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}}$$

La $\vec{F}$ che entra nella seconda legge di Newton è la risultante, cioè è la somma di tutte le forze agenti su m.

Es. Corpo appoggiato su un piano orizzontale.



$\vec{P} = m\,\vec{g}$ (forza peso)
$\vec{N} \equiv$ reazione vincolare del piano

$$\vec{N} + m\,\vec{g} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{la risultante è } \vec{0} \quad \overset{2^a}{\Longrightarrow} \quad \vec{a} = \vec{0}.$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 6

Venerdì 9 ottobre 2026

6.1 Sistemi di riferimento inerziali; azione e reazione

(Le tre leggi di Newton sono nel § 5.7.)

Sistemi di riferimento inerziali

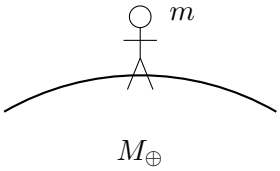
Il primo principio fornisce un modo operativo di identificare i sistemi di riferimento INERZIALI: sono quelli in cui vale il primo principio.

ⓐ Se in un sistema di riferimento, in assenza di forze, un corpo si muove di moto rettilineo uniforme ⇒ sistema di riferimento inerziale.

ⓑ Se in un sistema di riferimento, in assenza di forze, un corpo accelera ⇒ sistema di riferimento non inerziale ⟶ FORZE FITTIZIE (forza centrifuga).

Azione e reazione: l'omino e la Terra

Es. Un omino di massa m sulla superficie della Terra (massa $M_\oplus$, raggio $R_\oplus$).



$$F_{\oplus\to m} = G\frac{M_\oplus\, m}{R_\oplus^2} = g\, m$$

$$F_{m\to\oplus} = G\frac{M_\oplus\, m}{R_\oplus^2}$$

Forza gravitazionale che la Terra esercita sull'omino. $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$

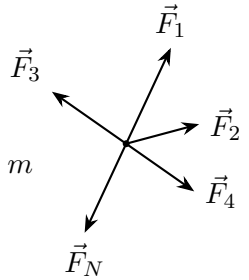
Sebbene le forze siano uguali in modulo, le accelerazioni sono completamente diverse:

$$m\, a_m = F_{\oplus\to m} \quad \Rightarrow \quad a_m = g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$$

$$M_\oplus\, a_\oplus = F_{m\to\oplus} \quad \Rightarrow \quad a_\oplus = \frac{1}{M_\oplus}\, G\frac{M_\oplus\, m}{R_\oplus^2} = \frac{G\, m}{R_\oplus^2} = g\,\frac{m}{M_\oplus} \approx 10^{-23}\, g \qquad (m \approx 70\,\mathrm{kg})$$

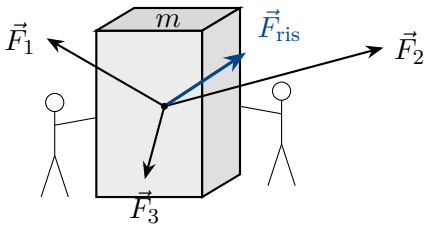
6.2 Seconda legge: la forza risultante

② $\vec{F} = m\,\vec{a}$; $\vec{F}$ è, in realtà, la risultante delle forze che agiscono su m.



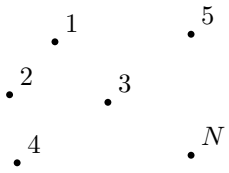
$$\vec{F}_{\text{risultante}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m} = \frac{\vec{F}_{\text{ris}}}{m}$$

6.3 Terza legge e conservazione della quantità di moto



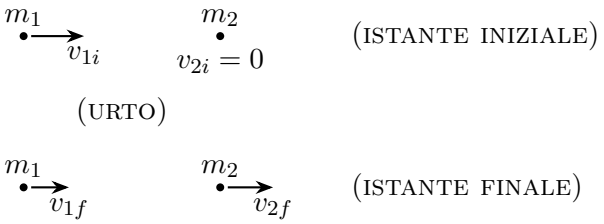
Sistema ISOLATO di N corpi puntiformi: non ci sono forze esterne $\equiv$ gli N corpi interagiscono solo tra di loro.

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{ris}} = \vec{0} \qquad (\text{perché } \forall\, \vec{F}_{i\to j} \text{ c'è } \vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j})$$

cioè per ogni forza che la particella i esercita sulla particella j, c'è una forza uguale e opposta che la particella j esercita sulla particella i.

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{v}_i = \underline{\text{costante}} \qquad \boxed{\text{CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO}}$$

Es. Urto tra due corpi.



Conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_{\text{iniziale}} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = m_1\, \vec{v}_{1i} + m_2\, \vec{v}_{2i} = m_1\, \vec{v}_{1i}$$
$$\vec{P}_{\text{finale}} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = m_1\, \vec{v}_{1f} + m_2\, \vec{v}_{2f}$$

Siccome $\vec{P}_{\text{iniziale}} = \vec{P}_{\text{finale}}$:

$$m_1\, v_{1i} = m_1\, v_{1f} + m_2\, v_{2f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{2f} = \frac{m_1\, v_{1i} - m_1\, v_{1f}}{m_2}}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

6.4 Forza costante e unità di misura della forza

Es. Una forza $F = 12\,\mathrm{N}$ agisce su una massa $m = 3\,\mathrm{kg}$. $a = ?$

$$m = 3\,\mathrm{kg} \longrightarrow F = 12\,\mathrm{N}$$

$$[F] = [m\,a] = \text{massa} \times \frac{L}{T^2} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \equiv \mathrm{N} \quad (\textbf{newton})$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{kg}} = 4\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m/s^2}}{\cancel{\mathrm{kg}}} = 4\,\mathrm{m/s^2}$$

$$F = \text{costante} \overset{(m \text{ costante})}{\Longrightarrow} a = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \text{moto uniformemente accelerato:}$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

Supponendo che il corpo parta da $x_0 = 0$ e da fermo ($v_0 = 0$):

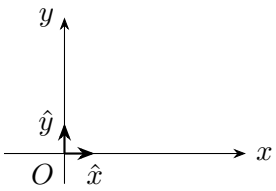
$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}\,t^2$$

6.5 Diagrammi delle forze

Obiettivo: calcolare $\vec{a} \Rightarrow$ abbiamo bisogno di $\vec{F}_{\text{risultante}}$. $\Rightarrow$ **Diagramma delle forze**: tracciare tutte le forze che agiscono su una massa m e poi sommarle.

Per sommarle usiamo un sistema di riferimento cartesiano opportuno.

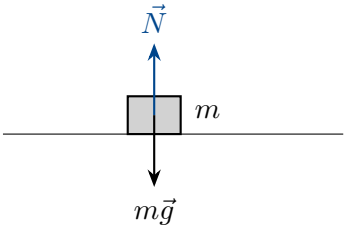
1° passo: scelta del sistema di riferimento.



$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_1 &= F_{1x}\,\hat{x} + F_{1y}\,\hat{y}\\ \vec{F}_2 &= F_{2x}\,\hat{x} + F_{2y}\,\hat{y}\end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_{\text{ris}} = \underbrace{(F_{1x} + F_{2x})}_{F_{\text{ris},x} = m\,a_x}\,\hat{x} + \underbrace{(F_{1y} + F_{2y})}_{F_{\text{ris},y} = m\,a_y}\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

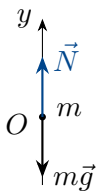
Es. Corpo appoggiato su un piano orizzontale.



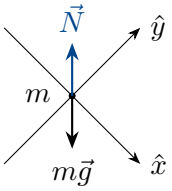
$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{\text{ris}} = \vec{0} \Rightarrow$ esiste una forza uguale e opposta a quella peso:
$\vec{N} \equiv$ reazione vincolare del piano.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$\vec{N}$ e $m\vec{g}$ NON sono una coppia AZIONE-REAZIONE.



$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$
$$\vec{P} = m\vec{g} = -m\,g\,\hat{y}$$



Qui bisognerebbe usare due componenti. Non è vantaggioso.

6.6 Piano inclinato

Trascuriamo l'attrito. $\vec{N}$ è sempre $\perp$ al piano di appoggio.

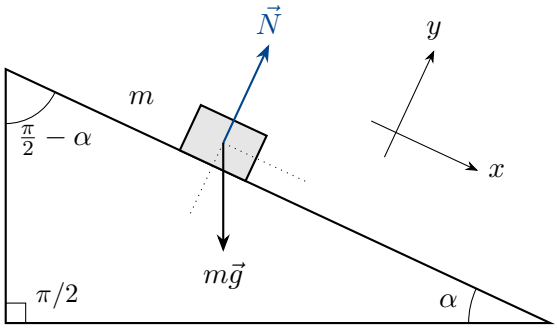
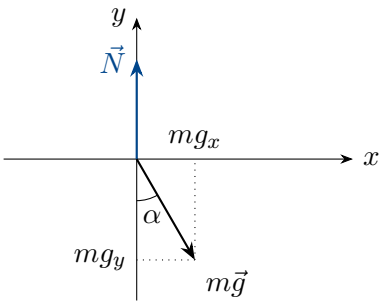


Diagramma delle forze nel sistema di riferimento ruotato (x lungo il piano, y perpendicolare ad esso):



$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$
$$m\vec{g} = \underbrace{(mg_x)}_{mg\sin\alpha}\,\hat{x} + \underbrace{(mg_y)}_{-mg\cos\alpha}\,\hat{y}$$

La forza risultante su m è:

$$\vec{F}_{\text{ris}} = \vec{N} + m\vec{g} = (mg\sin\alpha)\,\hat{x} + (N - mg\cos\alpha)\,\hat{y}$$

La reazione vincolare pareggia sempre la forza opposta ad essa $\Rightarrow N = mg\cos\alpha$.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Reazione vincolare $\vec{N}$:

① appare quando c'è un corpo appoggiato;

② è sempre $\perp$ alla superficie di appoggio;

③ pareggia sempre le forze a essa opposte.

Quindi:

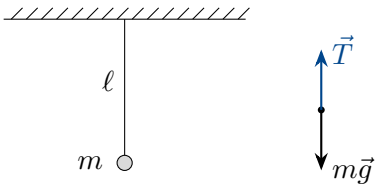
$$\vec{F}_{\text{ris}} = (mg\sin\alpha)\,\hat{x}$$

$\Rightarrow$ il corpo di massa m si muove lungo il piano inclinato (asse x) con accelerazione

$$\boxed{a = g\sin\alpha} \qquad \left(= \frac{F_{\text{ris}}}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m}\right)$$

$$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{g}{2}}$$

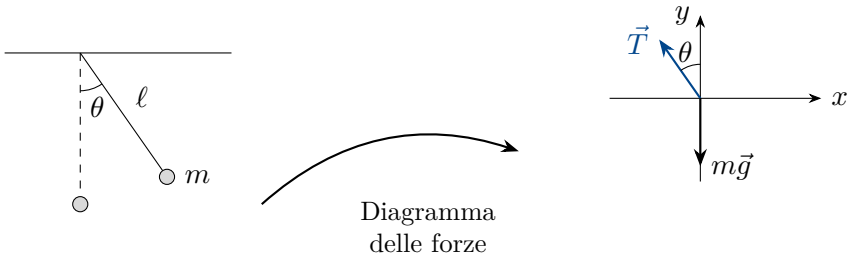
6.7 Pendolo



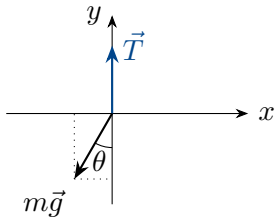
$\vec{T} \equiv$ tensione del filo

(Di solito, il filo si considera inestensibile e di massa zero.)

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}, \qquad \text{il pendolo è a riposo.}$$



Questa è una scelta legittima di sistema di riferimento, ma non la più conveniente (è meglio sempre orientare il sistema di riferimento con un asse lungo le reazioni vincolari):



$$\vec{T} = T\,\hat{y}$$

$$m\vec{g} = -mg\sin\theta\,\hat{x} - mg\cos\theta\,\hat{y}$$

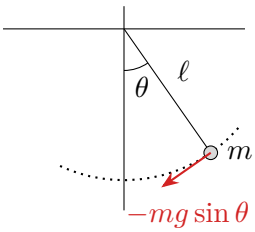
$$\vec{F}_{\text{ris}} = \vec{T} + m\vec{g} = -mg\sin\theta\,\hat{x} + (T - mg\cos\theta)\,\hat{y}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

La massa m si muove lungo una circonferenza di raggio ℓ. Lungo il filo (asse y, diretto verso il punto di sospensione) la risultante deve quindi fornire l'accelerazione centripeta v^2/ℓ:

$$T - mg\cos\theta = m\,\frac{v^2}{\ell}$$

La tensione è una reazione vincolare: poiché il filo non si può estendere, T assume il valore necessario a mantenere m sulla circonferenza. In particolare $T = mg\cos\theta$ solo quando il pendolo è fermo ($v = 0$), cioè agli estremi dell'oscillazione.



⟵ è una forza tangenziale

$\Rightarrow$ la forza $-mg\sin\theta$ produce l'accelerazione tangenziale, che dipende dalla derivata seconda di θ. L'arco percorso è $s = \ell\,\theta$, quindi $a_t = \ell\,\ddot{\theta}$ e $m\,\ell\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$:

$$\boxed{\ell\,\ddot{\theta} = -g\sin\theta}$$

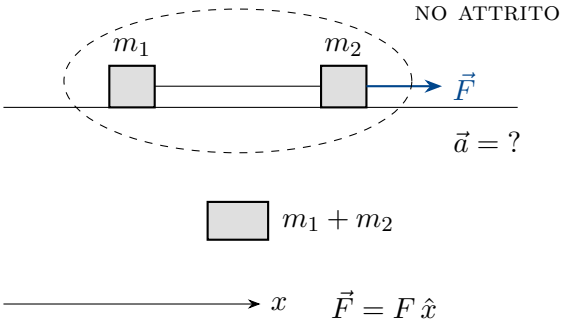
Se $\theta \ll 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\,\theta} \qquad \text{moto armonico,} \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Qui indichiamo il periodo con τ, per non confonderlo con la tensione T.

6.8 Due masse collegate da un filo

Es. Senza attrito. Una forza $\vec{F}$ tira la massa m_2, collegata con un filo alla massa m_1. $\vec{a} = ?$

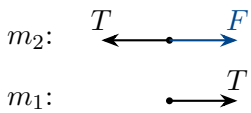


Il problema è in una sola dimensione.

$m_1 = 2\,\text{kg}$
$m_2 = 3\,\text{kg}$
$F = 10\,\text{N}$

① Se avessimo solo m_2: $a = \dfrac{F}{m_2} = \dfrac{10}{3}\,\text{m/s}^2$ ($\simeq 3{,}3\,\text{m/s}^2$).

② Diagramma delle forze di m_2 e di m_1:



© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

③ Applichiamo $F = ma$:

$$\begin{cases} m_2\, a_2 = F - T \\ m_1\, a_1 = T \end{cases}$$

④ Il sistema delle due masse si muove complessivamente con la stessa accelerazione $a = a_1 = a_2$:

$$\begin{cases} m_2\, a = F - T \\ m_1\, a = T \end{cases}$$

⑤ Sostituendo $T = m_1 a$ nella prima equazione:

$$m_2\, a = F - m_1\, a \quad \Rightarrow \quad \boxed{(m_1 + m_2)\, a = F}$$

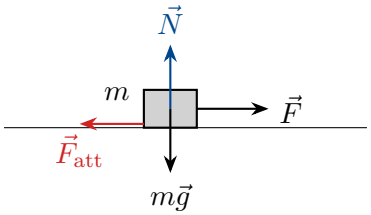
cioè la 2ª legge di Newton applicata a una massa $m_1 + m_2$.

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{10\,\text{N}}{2\,\text{kg} + 3\,\text{kg}} = 2\,\text{m/s}^2$$

⑥ La tensione del filo:

$$T = m_1\, a = m_1\, \frac{F}{m_1 + m_2} = 2\,\text{kg} \cdot \frac{10\,\text{N}}{5\,\text{kg}} = 4\,\text{N}$$

6.9 Forza di attrito



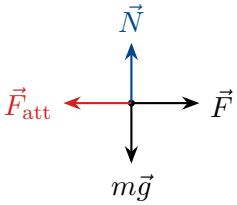
$\boxed{F_{\text{att}} = \mu\, N}$

$\mu_S \equiv$ COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO
$\mu_D \equiv$ COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO

$$\boxed{\mu_S \geq \mu_D}$$

La forza di attrito è parallela al piano di appoggio e si oppone al moto (o al tentativo di moto).

Diagramma delle forze:

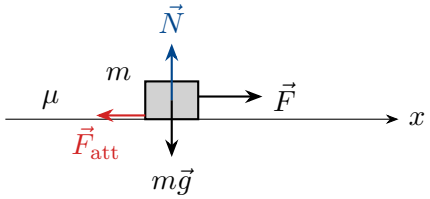


$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_{\text{att}} = m\,\vec{a}}$$

$$\boxed{F_{\text{att}} = \mu\, N = \mu\, mg}$$

Es. $m = 5\,\text{kg}$, $\mu_S = 0{,}4$, $\mu_D = 0{,}3$, $F = 15\,\text{N}$.



© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Il corpo è inizialmente a riposo. $F = 15\,\mathrm{N}$ basta a metterlo in movimento?

Perché sia sufficiente a metterlo in movimento serve $F > F_{\text{att, statica}}$.

Attenzione: $\vec{F}_{\text{att}}$ c'è quando c'è la $\vec{F}$ che prova a spingere il corpo. Il valore μN lo si può sempre calcolare, ma la forza di attrito esiste solo se c'è la $\vec{F}$ che spinge il corpo.

Nel nostro caso serve

$$\boxed{F > \mu_S\, m\, g} \qquad \mu_S\, m\, g = 0{,}4 \cdot 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}4 \cdot 50\,\mathrm{N} = 20\,\mathrm{N}$$

Poiché $F = 15\,\mathrm{N} < 20\,\mathrm{N}$:

$$\Rightarrow \quad \text{il corpo } \underline{\text{non}} \text{ si muove.}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 7

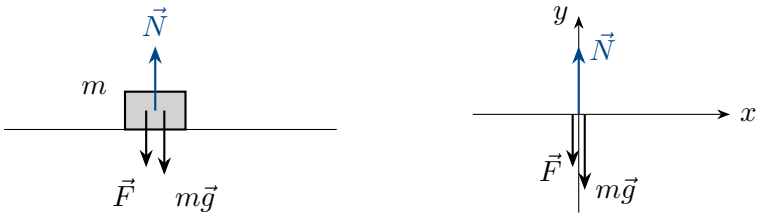
Venerdì 16 ottobre 2026

7.1 Reazione vincolare: blocco spinto verso il basso

Per un blocco appoggiato su un piano orizzontale la reazione vincolare bilancia il peso, $N = mg$ (§ 6.5).

Es. $m = 3\,\text{kg} \;\Rightarrow\; mg = 3\,\text{kg} \times 10\,\text{m/s}^2 = 30\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 30\,\text{N}$.

Es. Blocco spinto verso il basso da una forza $\vec{F}$.



$$\vec{N} = N\,\hat{y} \qquad (N > 0), \quad N = |\vec{N}|$$
$$\vec{F} = -F\,\hat{y} \qquad (F > 0), \quad F = |\vec{F}|$$
$$\vec{P} = -mg\,\hat{y}$$

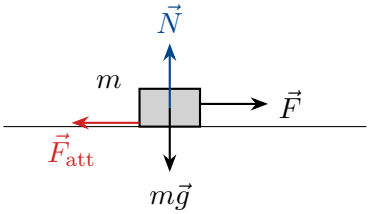
Siccome $\vec{a} = \vec{0}$:

$$N - F - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = F + mg}$$

Con $m = 3\,\text{kg}$ e $F = 10\,\text{N}$:

$$\begin{aligned} N &= 10\,\text{N} + 3\,\text{kg} \times 10\,\text{m/s}^2 \\ &= 10\,\text{N} + 30\,\text{N} \\ &= 40\,\text{N} \end{aligned}$$

7.2 Forza di attrito



$\vec{F}_{\text{att}} \equiv$ forza di attrito

$F_{\text{att}} = \mu\, N$

Direzione: quella del moto, o quella del moto che avverrebbe in assenza di attrito

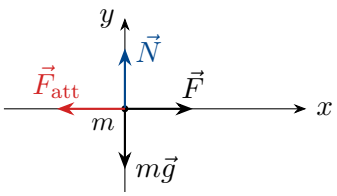
Verso: opposto al moto

Attrito statico: μ_S. Il moto non c'è, ma tenderebbe a esserci perché viene esercitata $\vec{F}$.

Attrito dinamico: μ_D. Il moto è in corso e $\vec{F}_{\text{att}}$ si oppone a questo moto.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Caso statico



$$\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{\text{ris}} = \vec{0}$$

$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$
$$\vec{P} = -mg\,\hat{y}$$
$$\vec{F} = F\,\hat{x}$$
$$\vec{F}_{\text{att}} = -F_{\text{att}}\,\hat{x}$$

$\vec{F}_{\text{ris}} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ la somma delle componenti x delle forze è nulla:

$$F - F_{\text{att}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = F_{\text{att}}$$

la somma delle componenti y delle forze è nulla:

$$N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

D'altra parte l'attrito statico non può superare il valore

$$F_{\text{att}}^{\max} = \mu_S\, N = \mu_S\, mg \qquad \text{FORZA DI ATTRITO STATICO MASSIMA}$$

F_{att} si adatta per bilanciare F, fino al valore massimo $\mu_S\, mg$:

$$\boxed{F_{\text{att}} \le \mu_S\, N}$$

Se $F > \mu_S\, mg$ $\Rightarrow$ il blocco si muove e la configurazione non è più statica.

Es. $m = 5\,\text{kg}$, $\mu_S = 0{,}40$, $F = 12\,\text{N}$. Si riesce a spostare il blocco?

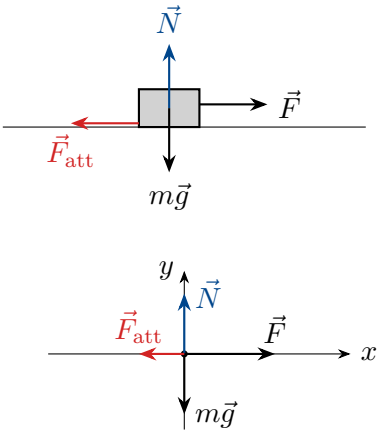
Si calcola $\mu_S\, mg$:

$$\mu_S\, mg = 0{,}40 \times 5\,\text{kg} \times 10\,\text{m/s}^2 = 20\,\text{N}$$

Se $F > 20\,\text{N}$, la configurazione non è più statica: l'attrito statico non basta a vincere la spinta di $\vec{F}$. Qui $F = 12\,\text{N} < 20\,\text{N}$: il blocco non si sposta.

Es. $m = 5\,\text{kg}$, $\mu_S = 0{,}40$, $\mu_D = 0{,}25$, $F = 25\,\text{N}$.

$$\mu_S\, mg = 20\,\text{N} < F \quad \Rightarrow \quad \text{il blocco si muove.}$$



$$\vec{F}_{\text{att}} = -F_{\text{att}}\,\hat{x}$$
$$\vec{F} = F\,\hat{x}$$
$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$
$$\vec{P} = -mg\,\hat{y} \qquad (g = 10\,\text{m/s}^2)$$

Non c'è movimento lungo y $\Rightarrow$ $a_y = 0$ $\Rightarrow$ $F_{\text{ris},y} = 0$ $\Rightarrow$ $N = mg$.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lungo x:

$$F_{\text{ris},x} = F - F_{\text{att}}$$
$$F_{\text{att}} = \mu_D\, N = \mu_D\, mg = 0{,}25 \times 5\,\text{kg} \times 10\,\text{m/s}^2 = 12{,}5\,\text{N}$$
$$F = 25\,\text{N}$$

Quindi:

$$F_{\text{ris},x} = F - F_{\text{att}} = 25\,\text{N} - 12{,}5\,\text{N} = 12{,}5\,\text{N}$$

Per la 2ª legge della dinamica:

$$a_x = \frac{F_{\text{ris},x}}{m} = \frac{12{,}5\,\text{N}}{5\,\text{kg}} = \frac{12{,}5\,\cancel{\text{kg}}\cdot\text{m/s}^2}{5\,\cancel{\text{kg}}} = 2{,}5\,\text{m/s}^2$$

In $\Delta t = 2{,}0\,\text{s}$, quale distanza Δx avrà percorso il blocco?

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}\, a_x\, (\Delta t)^2 + v_0\, \Delta t, \qquad \text{ma } v_0 = 0, \text{ quindi:}$$
$$\Delta x = \tfrac{1}{2}\, a_x\, (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \tfrac{1}{2} \times 2{,}5\,\text{m/s}^2 \times (2{,}0\,\text{s})^2 = 5{,}0\,\text{m}$$

7.3 Traino obliquo

Coefficienti di attrito μ_S, μ_D.

$$\vec{F} = F_x\,\hat{x} + F_y\,\hat{y} = F\cos\theta\,\hat{x} + F\sin\theta\,\hat{y}$$
$$\vec{F}_{\text{att}} = -F_{\text{att}}\,\hat{x}$$
$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$
$$\vec{P} = -mg\,\hat{y}$$

Ora calcoliamo la forza risultante: $\vec{F}_{\text{ris}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{att}} + \vec{N} + \vec{P}$.

$$F_{\text{ris},x} = F\cos\theta - F_{\text{att}} \qquad \Rightarrow \quad m\,a_x = F\cos\theta - F_{\text{att}}$$
$$F_{\text{ris},y} = F\sin\theta + N - mg \quad \overset{(a_y=0)}{\Longrightarrow} \quad N = mg - F\sin\theta$$

con $mg > F\sin\theta$ (altrimenti il blocco viene sollevato).

Quindi la forza di attrito è:

$$\boxed{F_{\text{att}} = \mu\, N = \mu\,(mg - F\sin\theta)}$$

Es. $m = 10\,\text{kg}$, il blocco scivola verso destra, $\mu_D = 0{,}20$, $F = 40\,\text{N}$, $\theta = 30°$. Trovare N e a_x.

$$N = mg - F\sin\theta = 10\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}^2 - 40\,\text{N} \times \sin(30°)$$
$$= 100\,\text{N} - 20\,\text{N} = 80\,\text{N}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$F_{\text{att}} = \mu_D\, N = 0{,}20 \times 80\,\text{N} = 16\,\text{N}$$

$$m\,a_x = F\cos\theta - F_{\text{att}} = 40\,\text{N}\cdot\cos(30°) - 16\,\text{N}$$

$$= 40\,\text{N}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 16\,\text{N}$$

$$\approx 34{,}6\,\text{N} - 16\,\text{N} = 18{,}6\,\text{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{F\cos\theta - F_{\text{att}}}{m} \approx \frac{18{,}6\,\text{N}}{10\,\text{kg}} = \frac{18{,}6\,\cancel{\text{kg}}\cdot\text{m/s}^2}{10\,\cancel{\text{kg}}} \approx 1{,}9\,\text{m/s}^2$$

7.4 Piano inclinato con attrito

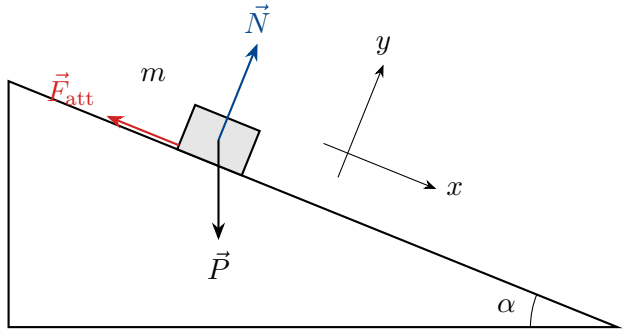
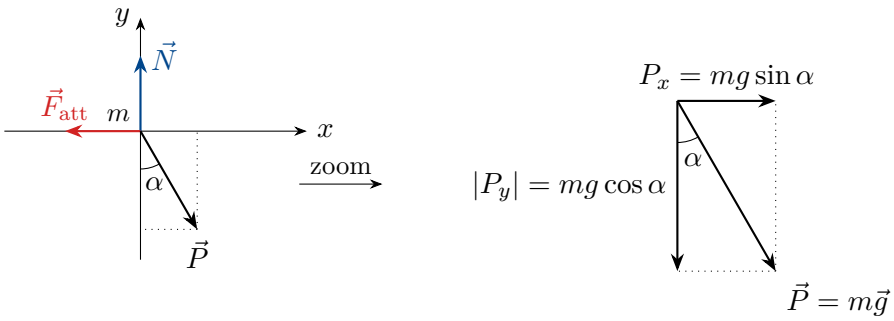
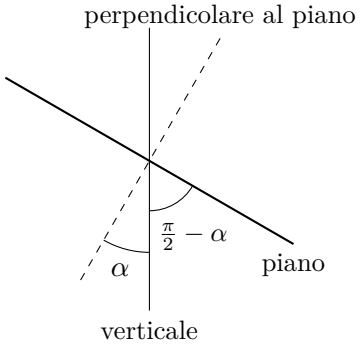


Diagramma delle forze nel sistema di riferimento ruotato (x lungo il piano, verso il basso; y perpendicolare ad esso):



L'angolo tra $\vec{P}$ e il semiasse y negativo è proprio α: infatti la verticale forma con il piano inclinato un angolo $\frac{\pi}{2} - \alpha$, quindi forma un angolo α con la perpendicolare al piano.



© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$\vec{F}_{\text{att}} = -F_{\text{att}}\,\hat{x}$$
$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$
$$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\hat{x} - mg\cos\alpha\,\hat{y}$$

Lungo y : $N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$

Lungo x : $\boxed{-F_{\text{att}} + mg\sin\alpha = m\,a_x}$ (si usa così solo nel caso dinamico)

Caso statico: μ_S

Il corpo viene appoggiato sul piano inclinato. Scivola?

$$F_{\text{att}}^{\max} = \mu_S\,N = \mu_S\,mg\cos\alpha$$

Se la forza lungo il piano inclinato non supera questo valore, il corpo non scivola:

$$mg\sin\alpha \le \mu_S\,mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \le \mu_S\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\alpha \le \mu_S}$$

è la condizione di non scivolamento. NON DIPENDE DALLA MASSA!

Es. $m = 2\,\text{kg}$, $\alpha = 30°$, $\mu_S = 0{,}40$, $\mu_D = 0{,}30$. Il corpo scivola? Se sì, con quale accelerazione?

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{quindi} \quad \tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \qquad (0{,}577\,350\,269\ldots)$$

Siccome $0{,}58 > 0{,}40 \;\Rightarrow$ il corpo scivola.

$$-F_{\text{att}} + mg\sin\alpha = m\,a_x$$
$$-\mu_D\,mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = m\,a_x$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad a_x &= g\sin\alpha - \mu_D\,g\cos\alpha = g\,(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha) \\
&= g\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu_D) \\
&\approx 10\,\text{m/s}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,(0{,}58 - 0{,}30) \qquad \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\,025\,4\ldots \approx 0{,}87\right) \\
&\approx 10 \times 0{,}87 \times 0{,}28\,\text{m/s}^2 \\
&\approx 2{,}4\,\text{m/s}^2
\end{aligned}$$

Frenata dovuta all'attrito

Es. Un blocco scivola senza attrito con velocità $\vec{v}$, $|\vec{v}| = 4\,\text{m/s}$, ed entra in una zona con attrito ($\mu_D = 0{,}20$). Quanto spazio percorre prima di fermarsi?

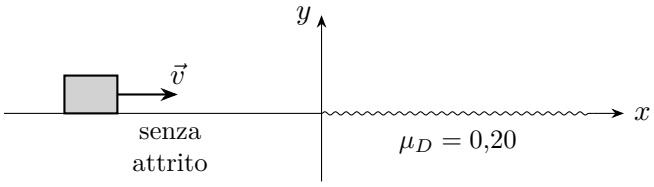
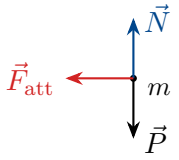


Diagramma delle forze:

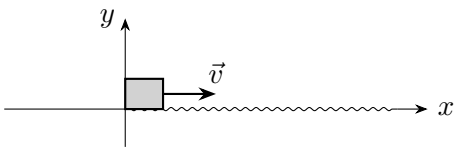
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



$$N = mg$$
$$F_{\text{att}} = \mu_D\, mg$$
$$m\, a_x = -\mu_D\, mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x = -\mu_D\, g}$$

L'accelerazione NON DIPENDE DALLA MASSA: la forza di attrito $F_{\text{att}} = \mu_D\, mg$ è tanto maggiore quanto maggiore è la massa, ma $F = m\,|\vec{a}| \;\Rightarrow\; |\vec{a}| = \dfrac{F}{m}$.

Entrando nella superficie scabra, il moto è rettilineo uniformemente decelerato.



$$x(t) = -\frac{\mu_D\, g}{2}\, t^2 + v_0\, t + x_0, \qquad x_0 = 0$$
$$v(t) = -\mu_D\, g\, t + v_0, \qquad v_0 = 4\,\text{m/s}$$

Dalla seconda: $v - v_0 = -\mu_D\, g\, t$. Per $v = 0 \;\Rightarrow$

$$\boxed{t = \frac{v_0}{\mu_D\, g}}$$

Finire per esercizio.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 8

Lunedì 19 ottobre 2026

8.1 Spazio di frenata su una superficie scabra

Completiamo l'esempio del blocco che entra in una zona con attrito (§ 7.4): $|\vec{v}_0| = 4\,\text{m/s}$, $\mu_D = 0{,}20$. Avevamo trovato $a = -\mu_D\, g$ e il tempo di arresto

$$t_f = \frac{v_0}{\mu_D\, g}.$$

Sostituiamo t_f in $x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 + v_0\, t + x_0$, con $x_0 = 0$:

$$x(t_f) \equiv x_f = -\tfrac{1}{2}\,\mu_D\, g\, t_f^2 + v_0\, t_f$$

$$\Rightarrow \quad x_f = -\frac{1}{2}\,\mu_D\, g\, \frac{v_0^2}{\mu_D^2\, g^2} + v_0\, \frac{v_0}{\mu_D\, g}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{v_0^2}{\mu_D\, g} + \frac{v_0^2}{\mu_D\, g} = \boxed{\frac{v_0^2}{2\,\mu_D\, g}}$$

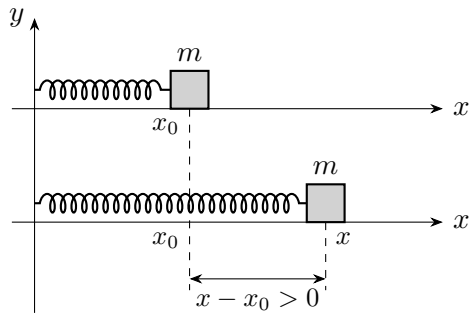
Ora si sostituiscono i valori numerici (e le unità di misura):

$$x_f = \frac{(4\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}20 \cdot 10\,\text{m/s}^2} = \frac{16\,\text{m}^2/\cancel{\text{s}^2}}{0{,}40 \cdot 10\,\text{m}/\cancel{\text{s}^2}}$$

$$= \frac{16}{4{,}0}\,\text{m} = 4{,}0\,\text{m}$$

8.2 Forza elastica (molla)

Consideriamo sempre una molla **ideale**, cioè **senza massa** (di massa trascurabile rispetto a quella del corpo m attaccato ad essa).



x_0 = posizione di riposo
(dove la molla non è né compressa né estesa)

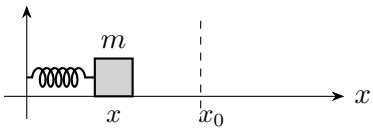
$$\boxed{F_x = -k\,(x - x_0)}$$

Legge di Hooke
$(k > 0)$

Se la molla è estesa, $(x - x_0)$ è positivo $\Rightarrow$ F_x deve agire in modo da ridurre $(x - x_0)$:

$$F_x = -k\,(x - x_0) < 0$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



Se la molla è compressa, $(x - x_0) < 0$
$\Rightarrow \quad F_x = -k\,(x - x_0) > 0$

k è detta COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA; $\quad [k] = \mathrm{N/m}$.

Nella scelta del sistema di riferimento, è comodo porre l'origine in corrispondenza della posizione di equilibrio:

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = -k\,x$$

In 3 dimensioni:

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\vec{x}}$$

Che tipo di moto instaura una forza elastica?

▶ **Animazione interattiva**: massa attaccata a una molla e grafico di $x(t)$

$$F_x = -k\,x \quad \underset{\text{usando la 2ª legge di Newton}}{\Longrightarrow} \quad m\,a_x = -k\,x \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x = -\frac{k}{m}\,x}$$

$$\Downarrow$$

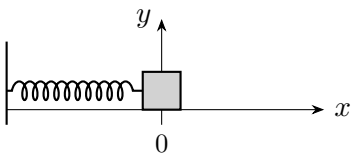
MOTO ARMONICO:

$$a_x = -\omega^2\,x, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\ \text{(pulsazione)}, \qquad T = \text{periodo}$$

Qui:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Es. Una massa è attaccata a una molla, su un piano orizzontale.



$k = 200\,\mathrm{N/m}$
$m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$
non c'è attrito
Calcolare forza e accelerazione per $x = 0{,}10\,\mathrm{m}$ e $x = -0{,}04\,\mathrm{m}$.

$$F_x = -k\,x, \qquad a_x = -\frac{k}{m}\,x$$

Quindi per $x = 0{,}10\,\mathrm{m}$:

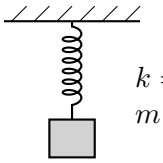
$$F_x = -200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}10\,\mathrm{m} = -20\,\mathrm{N}$$
$$a_x = -\frac{200\,\mathrm{N/m}}{0{,}50\,\mathrm{kg}} \cdot 0{,}10\,\mathrm{m} = \frac{-20\,\mathrm{N}}{0{,}50\,\mathrm{kg}} = -40\,\mathrm{m/s^2} \qquad \left(\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)$$

Per $x = -0{,}04\,\mathrm{m}$:

$$F_x = -200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (-0{,}04\,\mathrm{m}) = 8{,}0\,\mathrm{N}$$
$$a_x = \frac{8{,}0\,\mathrm{N}}{0{,}50\,\mathrm{kg}} = 16\,\mathrm{m/s^2}$$

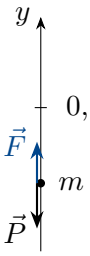
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Una massa è appesa a una molla verticale.



$k = 100\,\mathrm{N/m}$
$m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$

Di quanto si allunga la molla, all'equilibrio?
(equilibrio tra forza peso e forza elastica)



$F_y = -k\,y > 0 \qquad (y < 0)$
$P = -mg$

$\vec{F}_{\text{ris}} = \vec{0}$
$\Rightarrow\ \vec{a} = \vec{0}$:
la massa è in quiete.

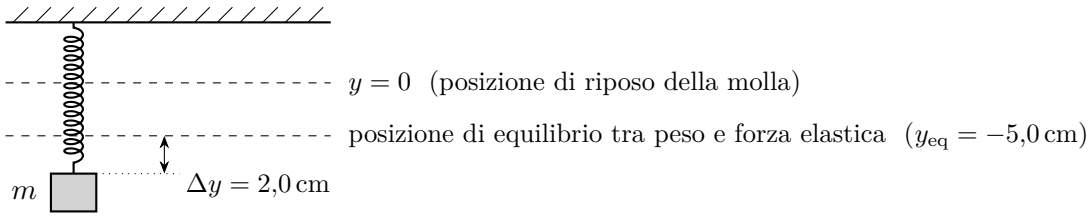
$$F_y + P = 0 \quad \Rightarrow \quad -k\,y - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -k\,y = mg$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{mg}{-k}$$

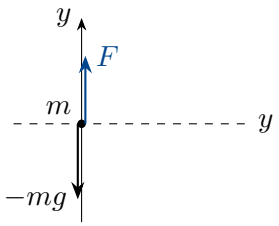
Quindi

$$y = \frac{0{,}50\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{-100\,\mathrm{N/m}} = -\frac{5{,}0 \times 10^{-1} \cdot 10}{10^2}\,\mathrm{m} = -5{,}0 \times \underbrace{10^{-2}\,\mathrm{m}}_{\mathrm{cm}}$$
$$= -5{,}0\,\mathrm{cm}$$

dove si è usato $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}}{\mathrm{m}}$.

Es. Partendo dalla posizione di equilibrio dell'esempio precedente, abbassiamo la massa di altri 2,0 cm. Che cosa succede?





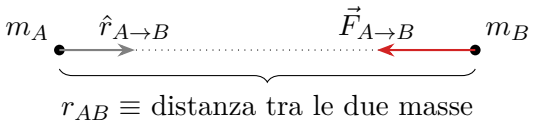
$P = -mg$
$F = -k\,y$

$$F_{\text{ris}} = -mg - k\,y = -0{,}50\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} - 100\,\mathrm{N/m} \cdot (-5{,}0\,\mathrm{cm} - 2{,}0\,\mathrm{cm})$$
$$= -5{,}0\,\mathrm{N} + 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 5{,}0\,\mathrm{cm} + 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 2{,}0\,\mathrm{cm}$$
$$= -5{,}0\,\mathrm{N} + 100\,\frac{\mathrm{N}}{10^2\,\cancel{\mathrm{cm}}} \cdot 5{,}0\,\cancel{\mathrm{cm}} + 100\,\frac{\mathrm{N}}{10^2\,\cancel{\mathrm{cm}}} \cdot 2{,}0\,\cancel{\mathrm{cm}}$$
$$= -5{,}0\,\mathrm{N} + 5{,}0\,\mathrm{N} + 2{,}0\,\mathrm{N}$$
$$= 2{,}0\,\mathrm{N}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$a = \frac{F_{\text{ris}}}{m} = \frac{2{,}0\,\text{N}}{0{,}50\,\text{kg}} = \frac{2{,}0\,\cancel{\text{kg}} \cdot \text{m/s}^2}{0{,}50\,\cancel{\text{kg}}} = 4{,}0\,\text{m/s}^2$$

8.3 Forza gravitazionale



$$\vec{F}_{A\to B} = -G\,\frac{m_A\,m_B}{r_{AB}^2}\,\hat{r}_{A\to B}$$

$\vec{F}_{A\to B}$ è la forza che la massa m_A esercita sulla massa m_B. Direzione della forza gravitazionale: retta congiungente le due masse.

$\hat{r}_{A\to B}$: è il versore che punta da A a B.

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \qquad \text{(costante gravitazionale di Newton)}$$

Per la 3ª legge della dinamica,

$$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B} = G\,\frac{m_A\,m_B}{r_{AB}^2}\,\hat{r}_{A\to B} = -G\,\frac{m_A\,m_B}{r_{AB}^2}\,\hat{r}_{B\to A}$$

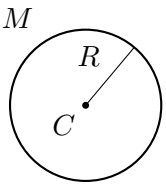
$$|\vec{F}_{\text{gravitazionale}}| = G\,\frac{m_A\,m_B}{r_{AB}^2}$$

è proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Direzione: retta congiungente le due masse puntiformi.

Verso: attrattivo.

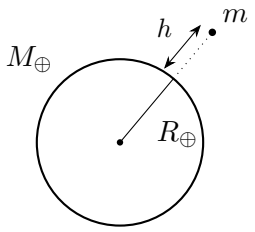
Teorema di Gauss)



Distribuzione sferica di massa:
per $r > R$, dal punto di vista gravitazionale, è come avere una massa puntiforme M posizionata nel centro C della sfera.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Calcolare g, l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre.



$$F_{\text{gravitazionale}} = G\,\frac{M_\oplus\, m}{(R_\oplus + h)^2}$$

L'accelerazione di m è data da:

$$\cancel{m}\, a = G\,\frac{M_\oplus \cancel{m}}{(R_\oplus + h)^2} \qquad m \text{ si semplifica! } \textsc{Universalità della caduta libera}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = G\,\frac{M_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}}$$

Alla superficie, $h = 0$:

$$\begin{aligned} a = G\,\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} &= 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\,\frac{5{,}96 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6{,}3 \times 10^3\,\mathrm{km})^2} \\ &= 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{kg}}\,\frac{5{,}96 \times 10^{24}}{3{,}97 \times 10 \times 10^6\,\mathrm{km}^2} \\ &= \frac{6{,}67 \cdot 5{,}96}{3{,}97} \times \frac{10^{13}}{10^7}\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{kg}\,(10^3\,\mathrm{m})^2} \\ &\approx 10 \times \frac{10^{13}}{10^7}\,\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\cdot \mathrm{m/s}^2 \cdot \cancel{\mathrm{m}^2}}{\cancel{\mathrm{kg}}\cdot 10^6\,\cancel{\mathrm{m}^2}} \\ &= 10\,\mathrm{m/s}^2 \equiv g \end{aligned}$$

Ora, se $h = R_\oplus$?

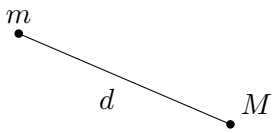
$$a = G\,\frac{M_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} = G\,\frac{M_\oplus}{(2R_\oplus)^2} = G\,\frac{M_\oplus}{4R_\oplus^2} = \frac{g}{4}$$

In generale, se $h \ll R_\oplus$ allora $a = g$ con ottima approssimazione:

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = m\,\vec{g} \qquad \text{(forza peso)}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Due masse puntiformi a distanza d.



$M = 10\,\mathrm{kg}$
$m = 2\,\mathrm{kg}$
$d = 0{,}50\,\mathrm{m}$
$F_{\mathrm{grav}} = ?$

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{grav}} = G\frac{mM}{d^2} &= 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\,\frac{2\,\mathrm{kg}\cdot10\,\mathrm{kg}}{(0{,}50\,\mathrm{m})^2} \\ &= 6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{20}{(5{,}0\times10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\,\mathrm{N\,m^2} \\ &= 6{,}67\times20\times10^{-11}\,\frac{1}{25\times10^{-2}\,\cancel{\mathrm{m^2}}}\,\mathrm{N}\cancel{\mathrm{m^2}} \\ &= \frac{6{,}67\times2\times\cancel{10}\times10^{-11}}{2{,}5\times\cancel{10}\times10^{-2}}\,\mathrm{N} \\ &= \frac{6{,}67\times2}{2{,}5}\times10^{-9}\,\mathrm{N}\approx5{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Accelerazione di m:

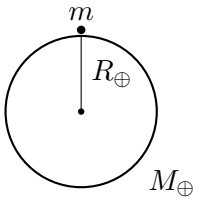
$$a = \frac{F_{\mathrm{grav}}}{m} = \frac{5{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} \approx 2{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m/s^2} \qquad (\text{verso } M)$$

Accelerazione di M:

$$A = \frac{F_{\mathrm{grav}}}{M} = \frac{5{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 5{,}3\times10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$$

Es. Un corpo sulla superficie terrestre.

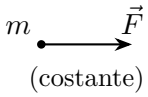
$m = 100\,\mathrm{kg}$
$M = M_\oplus \approx 10^{25}\,\mathrm{kg}$
$d = R_\oplus$



$$\begin{aligned} F_{\mathrm{grav}} &= G\frac{M_\oplus\, m}{R_\oplus^2} \\ a = \frac{F_{\mathrm{grav}}}{m} &= \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = g = 10\,\mathrm{m/s^2} \\ A = \frac{F_{\mathrm{grav}}}{M_\oplus} &= \frac{Gm}{R_\oplus^2} = \frac{Gm}{R_\oplus^2}\,\frac{M_\oplus}{M_\oplus} = \frac{m}{M_\oplus}\,\underbrace{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}}_{g} \\ &\approx \frac{100}{10^{25}}\,g \approx 10^{-23}\,g \end{aligned}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

8.4 Lavoro di una forza



$\vec{F}$ costante agisce su una massa m: $\vec{F} = m\,\vec{a}$.
La massa si muove, e in un certo intervallo di tempo Δt esegue uno spostamento $\Delta\vec{r}$.

Si chiama LAVORO DI $\vec{F}$:

$$\boxed{\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}$$

$\vec{F} = F\,\hat{x}$, $\quad F$ è costante
$\vec{a} = \dfrac{F}{m}\,\hat{x}$, $\quad \dfrac{F}{m}$ è costante $\Rightarrow$ a è costante
$\Downarrow$
moto uniformemente accelerato

$$x = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$
$$v = a\,t + v_0$$

Ricaviamo t dalla seconda:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Per semplicità, consideriamo $v_0 = 0$ e $x_0 = 0$:

$$x = \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{a} \quad \Rightarrow \quad a\,x = \frac{1}{2}\,v^2$$

Ma $a = \dfrac{F}{m}$, quindi:

$$\frac{F}{m}\,x = \frac{1}{2}\,v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F\,x = \frac{1}{2}\,m\,v^2}$$

$F\,x = W$ lavoro compiuto dalla forza per spostare la massa da 0 a x
$\frac{1}{2}\,m\,v^2 \equiv K$ ENERGIA CINETICA

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 9

Venerdì 23 ottobre 2026

9.1 Lavoro ed energia cinetica con velocità iniziale non nulla

Nel § 8.4 abbiamo ricavato $F\,x = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ ponendo $v_0 = 0$ e $x_0 = 0$. Rifacciamo il calcolo senza queste ipotesi, sempre in una dimensione e con forza costante (moto uniformemente accelerato). Ricordiamo anche che se $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$ ($\theta = 90°$) il lavoro è nullo.

$$W = F\,\Delta x = m\,a\,\Delta x \qquad \text{è il lavoro compiuto da } F \text{ sullo spostamento } \Delta x.$$

Abbiamo

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta x = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t, \qquad v = a\,t + v_0 \;\Rightarrow\; v - v_0 = a\,t \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{1}{2}\,\cancel{a}\,\frac{(v - v_0)^2}{\cancel{a^2}} + \frac{v_0\,v - v_0^2}{a}$$

Moltiplichiamo per a:

$$\begin{aligned} a\,\Delta x &= \frac{1}{2}\left(v^2 + v_0^2 - 2\,v\,v_0\right) + v_0\,v - v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\,v^2 + \frac{1}{2}\,v_0^2 - \cancel{v\,v_0} + \cancel{v_0\,v} - v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,v_0^2 \end{aligned}$$

Quadrato di un binomio

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$a\,\Delta x = \frac{1}{2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{m}\,\Delta x = \frac{1}{2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta x = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

dove

$$K \equiv \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad \text{ENERGIA CINETICA}$$

$$[\text{energia}] = \text{J (Joule)} = \text{N m} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$[K] = [m\,v^2] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

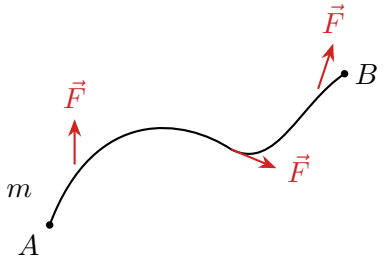
$$\boxed{W = F\,\Delta x = K - K_0 = \Delta K}$$

$\Rightarrow$ Il lavoro di una forza produce una variazione di energia cinetica.

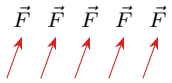
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

9.2 Lavoro di una forza non costante

Il risultato vale anche in 3 dimensioni e per forze non omogenee.



massa puntiforme m si muove da A a B in un campo di forze.

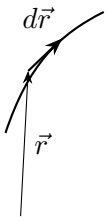


In ogni punto dello spazio si ha un vettore forza.

Come si calcola, in questo caso generale, il lavoro?

Partiamo da $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, ma $\vec{F}$ non è costante $\Rightarrow \vec{F}(\vec{r})$.

Calcolo infinitesimale: $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$



$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$
lavoro infinitesimale compiuto da $\vec{F}(\vec{r})$

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

integrale di cammino (fatto lungo la traiettoria) da A a B.

In una dimensione:

$$W = \int_A^B F(x)\,dx = \int_A^B m\,a\,dx = \int_A^B m\,\frac{dv}{dt}\,dx = \int_A^B m\,dv\,\frac{dx}{dt} = \int_A^B m\,v\,dv = \frac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_A^B$$
$$= \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 = K_B - K_A = \Delta K$$

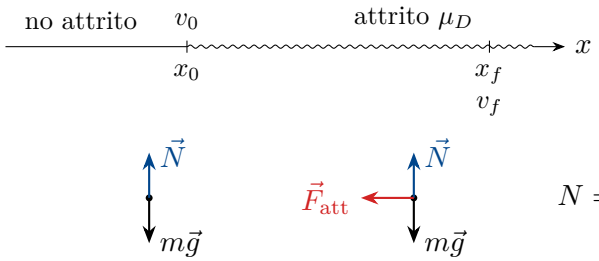
9.3 Teorema dell'energia cinetica

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA: il lavoro compiuto dalla risultante di tutte le forze agenti su una particella di massa m è pari alla variazione di energia cinetica:

$$W = \Delta K$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. 1) Spazio di frenata



$$F_{\text{att}} = -\mu_D\, mg \qquad \Rightarrow \qquad W = F_{\text{att}}\,\Delta x = -\mu_D\, mg\,\Delta x$$

$$\Delta K = K_f - K_0 = 0 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

Teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad -\mu_D \cancel{m}\, g\,\Delta x = -\frac{1}{2}\cancel{m}\, v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{v_0^2}{2\,\mu_D\, g}}$$

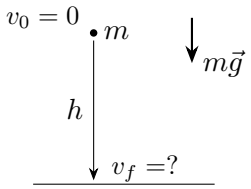
Con $\mu_D = 0{,}7$ e $v_0 = 50\,\text{km/h}$ ($50 = 5 \cdot 10$):

$$\Delta x = \frac{(50\,\text{km/h})^2}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 10\,\text{m/s}^2} = \frac{25 \cdot 10^{\cancel{2}} \cdot (10^3\,\text{m})^2/\text{h}^2}{1{,}4 \cdot \cancel{10}\,\text{m/s}^2} = \frac{2{,}5 \cdot 10^2 \cdot 10^6\,\text{m}^{\cancel{2}}/(3{,}6 \cdot 10^3\,\text{s})^2}{1{,}4\,\cancel{\text{m}}/\text{s}^2}$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot 10^8}{1{,}4 \cdot (3{,}6)^2 \cdot 10^6\,\cancel{s^2}/\cancel{s^2}}\,\text{m} = (0{,}137786\ldots) \cdot 10^2\,\text{m} = 14\,\text{m}$$

Se $v_0 = 100\,\text{km/h} \;\Rightarrow\; \Delta x \approx 55\,\text{m}$ (un fattore 4 maggiore: $\Delta x \propto v_0^2$).

Es. 2) Caduta libera



Teorema dell'energia cinetica:

$W = mgh$

$\Delta K = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2$

$$W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad \cancel{m}\, g\, h = \frac{1}{2}\cancel{m}\, v_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = 2\, g\, h \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_f = \sqrt{2\, g\, h}}$$

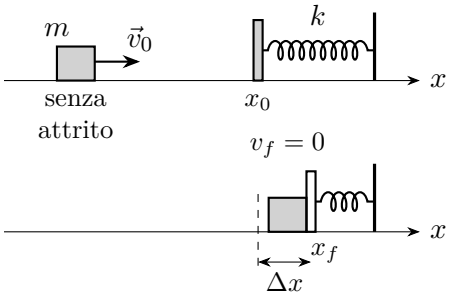
Se $h = 10\,\text{m}$:

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 10\,\text{m}} = \sqrt{2 \cdot 10^2\,\text{m}^2/\text{s}^2} = \left(2 \cdot 10^2 \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2} \cdot 10\,\text{m/s}$$

$$= 14\,\text{m/s} = 50\,\text{km/h}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. 3) Blocco contro una molla



Di quanto il blocco comprime la molla?

$F = -k\,(x - x_0)$

Lavoro compiuto dalla forza elastica? $W = ?$

Variazione di energia cinetica:

$\Delta K = K_f - K_0 = -\frac{1}{2}\,m\,v_0^2$

$(K_f = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 = 0$ perché $v_f = 0)$

$$W = -\frac{1}{2}\,k\,(x_f - x_0)^2 \qquad (*)$$

Quindi, dal teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\,k\,(x_f - x_0)^2 = -\frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

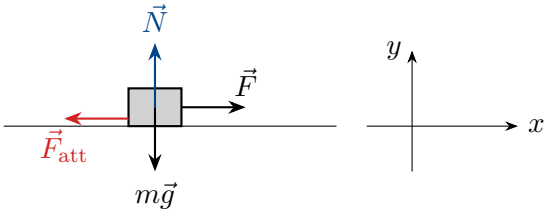
$$\Rightarrow \quad k\,(\Delta x)^2 = m\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)^2 = \frac{m\,v_0^2}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0}$$

$(*)$ Il lavoro della forza elastica si calcola con l'integrale:

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_f} \left[-k\,(x - x_0)\right] dx = -\frac{1}{2}\,k\,(x_f - x_0)^2$$

9.4 Lavoro di una reazione vincolare

È sempre $= 0$ perché la reazione vincolare è sempre $\perp$ (perpendicolare) alla direzione del moto.



In questo caso $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{x}$

$\vec{N}$ e $\vec{P}$ sono: $\vec{N} = N\,\hat{y}$

$\vec{P} = -mg\,\hat{y}$

Quindi $(N = mg)$:

$$\vec{N} \cdot \Delta\vec{r} = N\,\Delta x\;\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$$

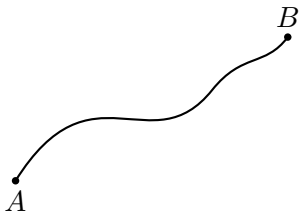
$$\vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = -mg\,\Delta x\;\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

9.5 Forze conservative

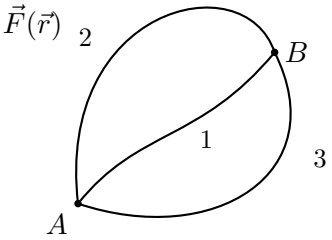
Sono quelle a cui si può associare un POTENZIALE, che è una funzione del punto dello spazio. Di solito si indica con $U(\vec{r})$.

Definizione di forza conservativa



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

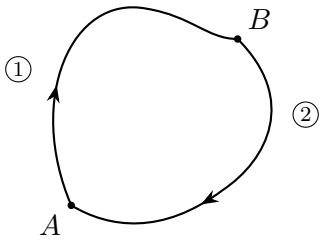
Quando $W_{A\to B}$ non dipende dal percorso che unisce A a B, il campo di forze si dice conservativo.



$$\left.\begin{matrix} W^{(1)}_{A\to B} \\ W^{(2)}_{A\to B} \\ W^{(3)}_{A\to B} \end{matrix}\right\} \text{ in generale, sono diversi tra loro}$$

Se

$$W^{(1)}_{A\to B} = W^{(2)}_{A\to B} = W^{(3)}_{A\to B} = \text{tutti gli altri possibili} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) \text{ è conservativo.}$$



$$W^{(1)}_{A\to B} = W^{(2)}_{A\to B} \quad \text{se } \vec{F}(\vec{r}) \text{ è conservativo,} \qquad \text{ma} \qquad W^{(2)}_{A\to B} = -W^{(2)}_{B\to A}.$$

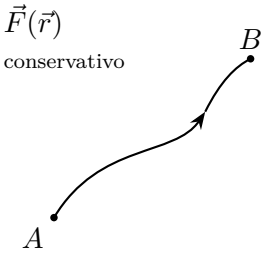
Quindi:

$$W^{(1)}_{A\to B} + W^{(2)}_{B\to A} = W^{(1)}_{A\to B} - W^{(2)}_{A\to B} = W^{(1)}_{A\to B} - W^{(1)}_{A\to B} = 0$$

> IL LAVORO COMPIUTO SU UN CIRCUITO (PERCORSO CHIUSO) È SEMPRE 0 IN UN CAMPO CONSERVATIVO.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Energia potenziale



$W_{A\to B}$ non dipende dalla traiettoria che unisce A a B.

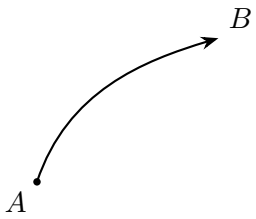
Dipende solo da A e B.

Energia potenziale: $U(A),\ U(B)$.

$$\boxed{W_{A\to B} = U(A) - U(B) = -\Delta U}$$

Il lavoro è pari alla differenza di energia potenziale cambiata di segno.

9.6 Conservazione dell'energia meccanica



campo di forze conservative

$W_{A\to B} = U(A) - U(B)$

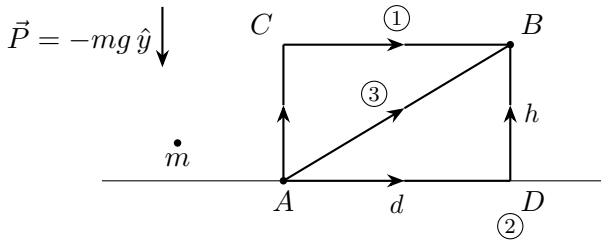
$W_{A\to B} = K(B) - K(A)$ (teorema dell'energia cinetica)

$$\Rightarrow \quad U(A) - U(B) = K(B) - K(A)$$
$$\Rightarrow \quad K(A) + U(A) = K(B) + U(B)$$

$\Rightarrow$ la somma $\boxed{K + U = E_{\text{meccanica}}}$ è conservata.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Lavoro della forza peso lungo tre percorsi diversi.



Abbiamo un campo di forze:
$\vec{P}$ agisce sempre su m
$\longrightarrow$ campo gravitazionale terrestre.

Poniamo l'origine del sistema di riferimento in A:

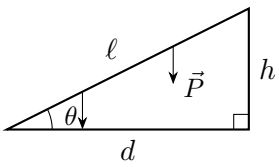
$$A = (0,0), \qquad B = (d,h)$$

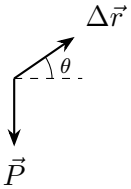
$$W^{(1)}_{A\to B} = \underbrace{-mgh}_{A\to C} + \underbrace{0}_{C\to B} = -mgh$$

(lungo il tratto $C \to B$ lo spostamento è $\perp \vec{P}$)

$$W^{(2)}_{A\to B} = \underbrace{0}_{A\to D} - mgh = -mgh$$

$$W^{(3)}_{A\to B} = -mg\,\ell\sin\theta = -mgh$$





$$\vec{P}\cdot\Delta\vec{r} = mg\,\Delta r\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$= -mg\,\Delta r\sin\theta$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 10

Lunedì 26 ottobre 2026

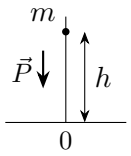
10.1 Più energie potenziali

L'energia meccanica $E_{\text{mecc}} = K + U$ si conserva quando agiscono solo forze conservative (§ 9.6). Per una massa puntiforme m c'è una sola energia cinetica,

$$K = \frac{1}{2} m v^2,$$

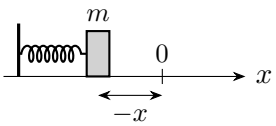
ma ci possono essere più energie potenziali: tante quante sono le forze conservative in gioco.

$$U_{\text{grav}} = m g h$$

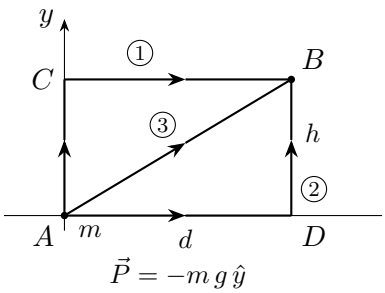


$$\vec{P} = -m g \hat{y}$$

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2} k x^2$$



10.2 Energia potenziale gravitazionale

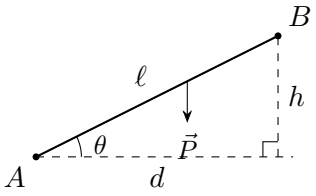


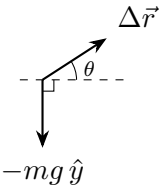
$$\begin{aligned} W^{(1)}_{A\to B} &= W_{A\to C} + W_{C\to B} = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{A\to C} + \vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{C\to B} \\ &= -mg\,\hat{y}\cdot h\,\hat{y} \underbrace{-\,mg\,\hat{y}\cdot d\,\hat{x}}_{=0} = -mgh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{(2)}_{A\to B} &= W_{A\to D} + W_{D\to B} = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{A\to D} + \vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{D\to B} \\ &= \underbrace{-mg\,\hat{y}\cdot d\,\hat{x}}_{=0} - mg\,\hat{y}\cdot h\,\hat{y} = -mgh \end{aligned}$$

$$W^{(3)}_{A\to B} = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{A\to B} = -mg\,\hat{y}\cdot\Delta\vec{r}_{A\to B} = -mg\,\underbrace{\ell\sin\theta}_{h}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

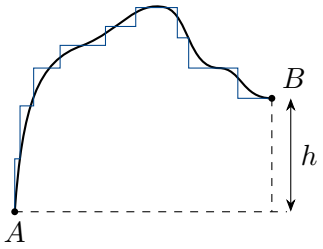




l'angolo tra $\vec{P}$ e $\Delta\vec{r}$ è $\dfrac{\pi}{2}+\theta$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$$

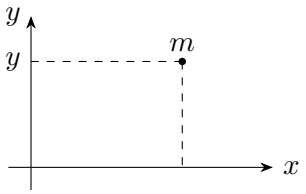
$$\vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{A\to B} = mg\,\ell\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -mg\,\ell\sin\theta \quad \Rightarrow \quad W^{(3)}_{A\to B} = -mgh = W^{(1)}_{A\to B} = W^{(2)}_{A\to B}$$



Per una traiettoria generica, si approssima questa con segmenti orizzontali ($W = 0$) e verticali ($W = -mg\,\Delta y$). Nel limite di un'approssimazione perfetta otteniamo $W_{A\to B}$, e la somma dei contributi verticali dà sempre $W_{A\to B} = -mgh$.

$$\Rightarrow \quad W_{A\to B} = -mg\,(y_B - y_A) = mg\,y_A - mg\,y_B$$

$$\boxed{U = m\,g\,y}$$



Siccome per $W_{A\to B}$ conta solo la differenza tra le energie potenziali:

<u>U è definita a meno di una costante additiva.</u>

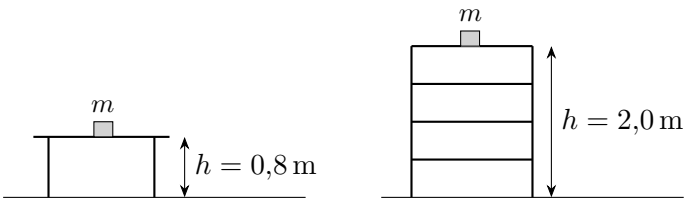
Ad esempio

$$U = mgy \qquad \text{o} \qquad U = mgy + C$$

vanno entrambe bene come energia potenziale gravitazionale.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. $m = 10\,\text{kg}$, appoggiata su un tavolo ($h = 0{,}8\,\text{m}$) oppure sul ripiano più alto di uno scaffale ($h = 2{,}0\,\text{m}$).



$$U = mgh = 10\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}8\,\text{m} = 80\,\text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 80\,\text{J} \qquad \left[\begin{array}{r} h = y\,(\text{dove si trova } m) \\ -\,y\,(\text{del pavimento}) \end{array}\right]$$
$$U = mgh = 10\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}0\,\text{m} = 200\,\text{J}$$

Cadendo, con che velocità raggiunge il suolo?

Soluzione cinematica (asse s diretto verso il basso, origine nel punto di partenza):

$$\begin{aligned} v &= g\,t + v_0 \\ s &= \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + s_0 \end{aligned} \qquad v_0 = 0 \;\; (\text{l'oggetto cade da fermo}), \qquad s_0 = 0$$

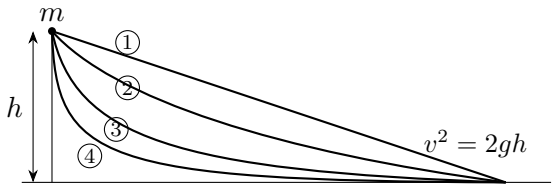
Ci serve sapere il tempo t_h tale che

$$\boxed{h = \frac{1}{2}\,g\,t_h^2} \quad \Rightarrow \quad t_h = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad v_h = g\left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} = (2gh)^{1/2}$$

Soluzione mediante la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{\text{mecc},0} = E_{\text{mecc},f} \quad \Rightarrow \quad K_0 + U_{\text{grav},0} = K_f + U_{\text{grav},f}$$
$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v = (2gh)^{1/2}$$

Es. Quattro piste diverse, senza attrito, che partono dalla stessa altezza h e arrivano a terra.



(Senza attrito) la velocità alla fine è sempre la stessa, $v = \sqrt{2gh}$.

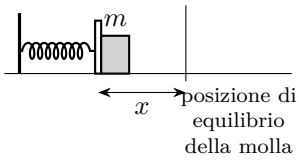
Il tempo Δt impiegato a percorrere la pista, invece, è diverso nei 4 casi. (Il minimo di Δt si ottiene per la BRACHISTOCRONA.)

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

10.3 Energia potenziale elastica

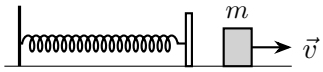
$$\boxed{U_{\text{el}} = \frac{1}{2}\,k\,x^2} \qquad (x \equiv \text{spostamento della molla dalla posizione di equilibrio})$$

Es. Una molla compressa di x spinge una massa m (senza attrito).



Supponiamo il sistema inizialmente a riposo:

$$E_{\text{mecc},0} = K_0 + U_{\text{el},0} = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$



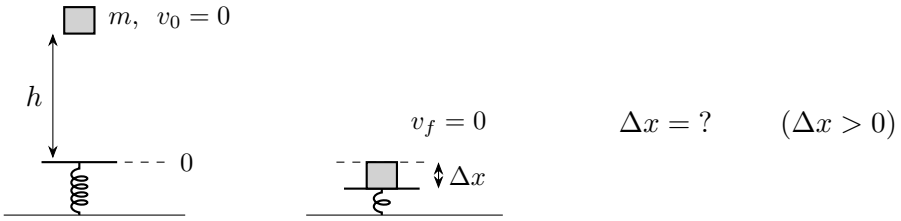
$$E_{\text{mecc},f} = K_f + U_{\text{el},f} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Uguagliando $E_{\text{mecc},0} = E_{\text{mecc},f}$ otteniamo:

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{k}{m}\,x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x}$$

Attenzione: qui x è lo spostamento iniziale della molla (la compressione).

Es. Una massa m cade da ferma da un'altezza h su una molla verticale e la comprime. Di quanto ($\Delta x > 0$)?



Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza dell'estremo libero della molla a riposo:

$$E_{\text{mecc},0} = K_0 + U_{\text{grav},0} + U_{\text{el},0} = mgh$$

$$E_{\text{mecc},f} = K_f + U_{\text{grav},f} + U_{\text{el},f} = -mg\,\Delta x + \frac{1}{2}\,k\,(\Delta x)^2$$

Per la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = -mg\,\Delta x + \frac{1}{2}\,k\,(\Delta x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,k\,(\Delta x)^2 - mg\,\Delta x - mgh = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2\,k\,mgh}}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{mg}{k}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\,k\,h}{mg}}\right]}$$

A noi interessa la soluzione con il segno $+$, perché rappresenta la massima compressione (con il segno $-$ si avrebbe $\Delta x < 0$).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

10.4 Potenza

Potenza: quantità di lavoro esercitato da una forza per unità di tempo.

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}} \qquad [\mathcal{P}] = \text{Watt (simbolo W)} = \text{J/s}$$

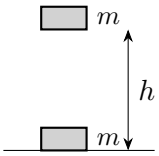
(Usiamo il simbolo $\mathcal{P}$ per non confondere la potenza con la forza peso $\vec{P}$ e con la quantità di moto totale $\vec{P}_{\text{tot}}$. Attenzione anche a non confondere il simbolo dell'unità di misura W con il lavoro W.)

Dato che $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

$$\mathcal{P} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$1\,\text{kWh} = 10^3\,\text{W} \cdot 3600\,\text{s} = 3{,}6 \times 10^6\,\text{J}$$

Es. Una massa $m = 500\,\text{kg}$ viene sollevata di $h = 10\,\text{m}$ in un tempo $\Delta t = 20\,\text{s}$.



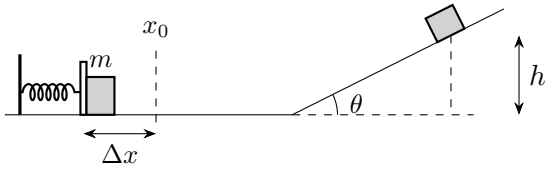
$\Delta W = mgh$ (lavoro necessario a sollevare la massa)

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{500\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 10\,\text{m}}{20\,\text{s}} = 2{,}5\,\text{kW}$$

($\Delta W/\Delta t$ è la potenza *media* nell'intervallo Δt.)

10.5 Altri esempi di conservazione dell'energia meccanica

Es. Una molla compressa di Δx lancia una massa m su per una rampa (non c'è attrito). A quale altezza h arriva?

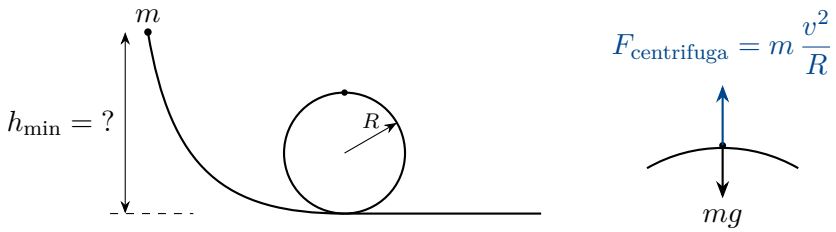


$$\frac{1}{2}\,k\,(\Delta x)^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{k\,(\Delta x)^2}{2\,mg}}$$

Non dipende da θ!

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Giro della morte. Da quale altezza minima $h_{\min}$ deve partire (da ferma) una massa m per percorrere tutto il giro di raggio R senza cadere (senza attrito)?



Nel punto più alto del giro deve essere

$$F_{\text{centrifuga}} \geq mg$$

perché m non cada, e quindi riesca a compiere il giro della morte.[2]

$$m\,\frac{v^2}{R} \geq mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 \geq g\,R} \qquad \text{condizione di } \underline{\text{non caduta}}.$$

Dalla conservazione dell'energia (tra il punto di partenza e il punto più alto del giro, che si trova a quota $2R$):

$$mgh = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + mg\,2R$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} + 2R \;\geq\; \frac{gR}{2g} + 2R = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5}{2}\,R$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h \geq \frac{5}{2}\,R}, \qquad \boxed{h_{\min} = \frac{5}{2}\,R}$$

▶ **Animazione interattiva**: giro della morte con altezza di partenza regolabile

10.6 Forze non conservative

Cosa succede alla conservazione dell'energia meccanica se ci sono anche forze non conservative?

$E_{\text{meccanica}}$ $\underline{\text{non}}$ si conserva:

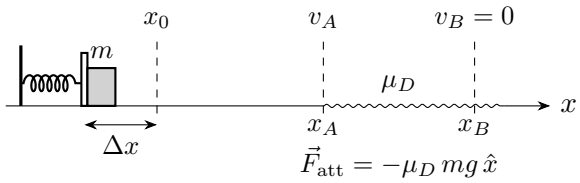
$$\boxed{\Delta E_{\text{meccanica}} = W_{\text{nc}}} \qquad (W_{\text{nc}} \equiv \text{lavoro delle forze non conservative})$$

L'attrito, ad esempio, è una forza non conservativa.

[2] La forza centrifuga è una forza apparente: compare nel sistema di riferimento (non inerziale) che si muove con la massa (si veda la Lezione 11). Nel sistema di riferimento inerziale del binario, lo stesso risultato si ottiene così: nel punto più alto peso e reazione vincolare $\vec{N}$ sono entrambi diretti verso il centro e devono fornire la forza centripeta, $mg + N = m\,v^2/R$; la massa resta a contatto con il binario se $N \geq 0$, cioè se $m\,v^2/R \geq mg$.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Una molla compressa di Δx lancia una massa m, che entra poi in una zona con attrito dinamico μ_D.



Bilancio energetico tra la posizione iniziale e x_A (lì non c'è attrito, quindi E_{mecc} si conserva):

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{mecc, iniziale}} &= \frac{1}{2}\, k\, (\Delta x)^2 \\ E_{\text{mecc, }A} &= \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = \frac{k\,(\Delta x)^2}{m}$$

In x_B la massa è ferma:

$$E_{\text{mecc, }B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{abbiamo perso energia meccanica.}$$

$$\Delta E_{\text{mecc}} = E_{\text{mecc, }B} - E_{\text{mecc, }A} = 0 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = -\frac{1}{2}\, m\, v_A^2$$

$$\Delta E_{\text{mecc}} = W_{\text{nc}} = -F_{\text{att}}\, \Delta s = -\mu_D\, mg\, \Delta s$$

dove $\Delta s \equiv x_B - x_A$ è lo spazio percorso prima di fermarsi. Da cui:

$$-\frac{1}{2}\, \cancel{m}\, v_A^2 = -\mu_D\, \cancel{m}\, g\, \Delta s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta s = \frac{v_A^2}{2\,\mu_D\, g}}$$

Questo è un risultato che torna con la cinematica (cfr. Lezione 7). Con l'origine dei tempi nell'istante in cui la massa passa per x_A, e $\vec{a} = -\mu_D\, g\, \hat{x}$:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\, \mu_D\, g\, t^2 + v_A\, t + x_A \\ v = -\mu_D\, g\, t + v_A \end{cases}$$

$$v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_D\, g\, t_B = v_A \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{v_A}{\mu_D\, g}$$

$$\Rightarrow \quad x_B - x_A = -\frac{1}{2}\, \mu_D\, g\, \frac{v_A^2}{\mu_D^2\, g^2} + v_A\, \frac{v_A}{\mu_D\, g} = \frac{v_A^2}{2\,\mu_D\, g}$$

10.7 Impulso e quantità di moto

$$\vec{p} = m\, \vec{v} \qquad \left(\text{da cui } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ in forma generale}\right)$$

$$\boxed{\vec{J} = \int \vec{F}\, dt} \qquad \text{IMPULSO}$$

Una forza che agisce per un certo intervallo di tempo genera un impulso, cioè una variazione di quantità di moto: integrando $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ nel tempo si ottiene

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}.$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

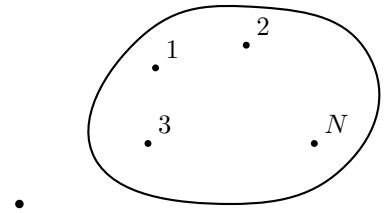
Es. Un corpo di massa m cade e urta una superficie: nell'urto la sua quantità di moto varia di $\Delta p = 7\,\mathrm{kg\,m/s}$ in un tempo $\Delta t = 1\,\mathrm{ms}$.

$$F_{\text{media}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{7\,\mathrm{kg\,m/s}}{1\,\mathrm{ms}} = \frac{7\,\mathrm{kg\,m/s}}{10^{-3}\,\mathrm{s}} = 7 \times 10^3\,\mathrm{N}$$

10.8 Conservazione della quantità di moto

In un sistema isolato (cioè su cui non agiscono forze esterne)

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \quad \text{è conservata.}$$



sistema isolato

$$\vec{p}_i = m_i\,\vec{v}_i$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

La massa M è esterna al sistema: la forza che esercita sulle masse $1, \ldots, N$ è una forza esterna.

Se

$$\vec{F}_{\text{ris, ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{ext}\to i} = \vec{0},$$

allora $\vec{P}_{\text{tot}}$ è costante.

Se le masse interagiscono tra loro, $\forall\, \vec{F}_{i\to j} \;\; \exists\, \vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$ per la terza legge della dinamica

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}}$$

(la somma di tutte le forze interne al sistema è nulla).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 11

Venerdì 30 ottobre 2026

11.1 Forze conservative e non conservative

Se si hanno più campi di forze: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$, per ognuna si calcola

$$W^{(1)}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}, \qquad W^{(2)}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}, \qquad \dots$$

$$\begin{aligned} W^{\text{tot}}_{A\to B} &= W^{(1)}_{A\to B} + W^{(2)}_{A\to B} + \dots + W^{(N)}_{A\to B} \\ &= \int_A^B \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N)}_{\vec{F}_{\text{risultante}}} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_{\text{risultante}} \cdot d\vec{r} \\ &= \Delta K = K_B - K_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \qquad \text{(teorema dell'energia cinetica)} \end{aligned}$$

Supponiamo di avere, tra queste N forze,

$$\begin{aligned} &\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_M && \text{conservative} \quad (M \le N) \\ &\vec{F}_{M+1}, \vec{F}_{M+2}, \dots, \vec{F}_N && \text{non conservative} \end{aligned}$$

Alle M forze conservative associamo M energie potenziali $U_1, U_2, \dots, U_M$. Quindi:

$$\begin{aligned} W^{\text{tot}}_{A\to B} &= W^{(1)}_{A\to B} + W^{(2)}_{A\to B} + \dots + W^{(M)}_{A\to B} + W^{(M+1)}_{A\to B} + W^{(M+2)}_{A\to B} + \dots + W^{(N)}_{A\to B} \\ &= -\Delta U_1 - \Delta U_2 - \dots - \Delta U_M + W^{(\text{tot, nc})}_{A\to B} \end{aligned}$$

dove $W^{(\text{tot, nc})}_{A\to B}$ è il lavoro totale delle forze non conservative. Ma abbiamo anche

$$W^{\text{tot}}_{A\to B} = \Delta K.$$

Combinando le due espressioni:

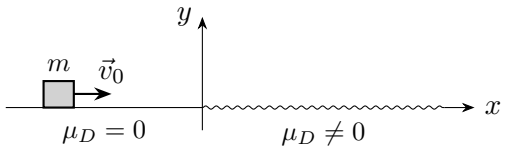
$$-\Delta U_1 - \Delta U_2 - \dots - \Delta U_M + W^{(\text{tot, nc})}_{A\to B} = \Delta K$$

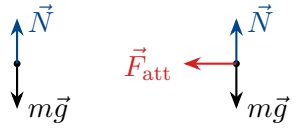
$$\Rightarrow \qquad \boxed{\Delta K + \Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots + \Delta U_M = W^{(\text{tot, nc})}_{A\to B}}$$

Il membro di sinistra è ΔE_{mecc}: è la relazione $\Delta E_{\text{mecc}} = W_{\text{nc}}$ vista nella Lezione 10.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Un blocco di massa m scivola con velocità v_0 ed entra in una zona con attrito dinamico μ_D. Agiscono la forza peso e l'attrito. Calcolare lo spazio di arresto.





$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$ (in entrambe le zone)

$\vec{F}_{\text{att}} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow\; a = -\mu_D\, g$ (zona con attrito)

$|\vec{F}_{\text{att}}| = \mu_D\,|\vec{N}| = \mu_D\, mg$

Usiamo $\Delta E_{\text{mecc}} = W_{\text{nc}}$:

$$E_{\text{mecc},0} = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

$E_{\text{mecc},f} = 0$ ($v_f = 0$ perché il blocco si ferma per l'azione dell'attrito)

$$\Downarrow$$

$$\Delta E_{\text{mecc}} = -\frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

$$W^{(\text{attrito})} = \int_0^f \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{r} = \int_0^f (-\mu_D\, mg)\, \hat{x} \cdot d\vec{r} = -\mu_D\, mg \int_0^f \underbrace{\hat{x} \cdot d\vec{r}}_{dx} = -\mu_D\, mg\, \Delta x$$

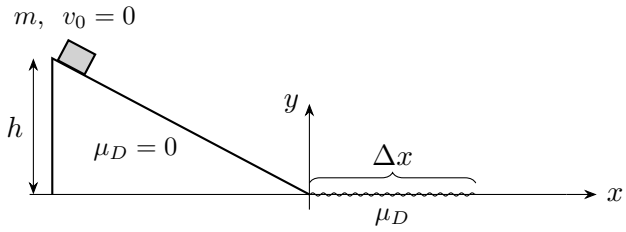
Quindi:

$$\Delta E_{\text{mecc}} = W^{(\text{attrito})} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\cancel{m}\, v_0^2 = -\mu_D\cancel{m}\, g\, \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\, v_0^2 = \mu_D\, g\, \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{v_0^2}{2\,\mu_D\, g}}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Un blocco di massa m parte da fermo da un'altezza h, scende lungo uno scivolo senza attrito e poi entra in una zona orizzontale con attrito μ_D.



$$E_{\text{mecc},0} = mgh$$
$$E_{\text{mecc}} \text{ (in } y = 0) = \frac{1}{2} m v^2$$
$$E_{\text{mecc},f} = 0$$

Senza attrito (dalla partenza a $y = 0$) l'energia meccanica si conserva:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh.$$

Nella zona con attrito, dall'esempio precedente:

$$\Delta x = \frac{v^2}{2 \mu_D g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{h}{\mu_D}}$$

11.2 Dall'energia potenziale alla forza

Per una forza conservativa:

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U_A - U_B.$$

Supponiamo di conoscere l'energia potenziale $U(\vec{r})$. Possiamo risalire alla forza? Sì:

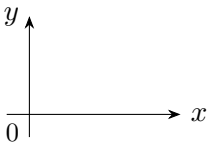
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

dove $\vec{\nabla} U$ (GRADIENTE di U) è il vettore che ha per componenti le derivate di U rispetto a x, y, z.[3]

In una dimensione:

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

$$U_{\text{grav}} = m g y$$



$$F_{\text{grav}} = -\frac{dU_{\text{grav}}}{dy} = -mg$$

[3] Più precisamente, le *derivate parziali*: $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$, dove ad esempio $\partial U / \partial x$ è la derivata di U rispetto a x, tenendo y e z fissati.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{el}} = -\frac{dU_{\text{el}}}{dx} = -k\,x \qquad \text{(legge di Hooke)}$$

(F_{grav} e F_{el} sono le componenti lungo y e lungo x delle due forze.)

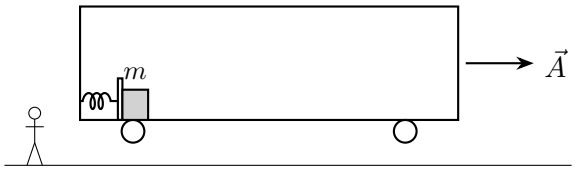
11.3 Forze apparenti

▶ **Animazione interattiva**: il vagone accelerato visto dalla stazione e dal vagone

Forze apparenti (dette anche *fittizie* o *inerziali*): forze che non hanno un'origine fondamentale, ma sono dovute all'accelerazione di un sistema di riferimento.

Ricordiamo il 1° principio della dinamica: un corpo non soggetto a forze mantiene uno stato di moto rettilineo uniforme (o di quiete). Questo vale nei sistemi di riferimento inerziali; in un sistema di riferimento accelerato non vale più, e per "salvarlo" bisogna introdurre le forze apparenti.

Es. Un vagone accelera con accelerazione $\vec{A}$ (sistema di riferimento non inerziale). Sul pavimento del vagone una massa m è appoggiata a una molla, fissata alla parete posteriore (senza attrito).



(sistema di riferimento della stazione)

Per l'osservatore a terra (sistema inerziale), la massa m accelera con $\vec{A}$: quale forza? $\vec{F} = m\,\vec{A}$.

$\vec{F}$ è data dalla molla:

$$\Rightarrow \quad k\,\Delta x = m\,A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{m\,A}{k}} \qquad \text{la molla è compressa.}$$

Però, per l'osservatore sul vagone, la massa m è a riposo. Tuttavia, la molla è schiacciata $\Rightarrow$ esercita la forza $F = k\,\Delta x$.

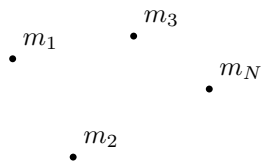
Quindi, affinché la massa stia a riposo, deve esistere una forza

$$F_{\text{inerziale}} = -k\,\Delta x = -m\,A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{m\,A}{k}}$$

diretta in verso opposto all'accelerazione del vagone. I due osservatori trovano la stessa compressione della molla.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

11.4 Quantità di moto totale di un sistema di masse puntiformi



N masse puntiformi
$\vec{p} = m\,\vec{v}$ (quantità di moto)
$\vec{p}_i = m_i\,\vec{v}_i, \qquad i = 1, \dots, N$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Ricordiamo la seconda legge della dinamica:

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_{\text{ris}}, \qquad m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{ris}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \overrightarrow{\text{costante}} \qquad \text{(per una particella)}$$

Per le N particelle introdotte sopra:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{ris}\to i}$$

dove $\vec{F}_{\text{ris}\to i}$ è la forza risultante che agisce sulla massa m_i.

Dividiamo $\vec{F}_{\text{ris}\to i}$ in forza risultante esterna e forza risultante interna: quella interna è dovuta alle altre masse; quella esterna no, è generata fuori dal sistema di N particelle.

$$\vec{F}_{\text{ris}\to i} = \vec{F}_{\text{ext}\to i} + \vec{F}_{\text{int}\to i}$$

Quindi:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{ext}\to i}\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{int}\to i}\Big)$$

Il primo termine è la risultante delle forze esterne. Se il sistema delle N particelle è ISOLATO (non agiscono forze esterne), oppure se le forze esterne hanno risultante nulla, questo termine è $\vec{0}$.

$$\vec{F}_{\text{int}\to i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{j\to i}, \qquad \vec{F}_{j\to i} \equiv \text{forza che la particella } j \text{ esercita sulla particella } i.$$

$j \neq i$ perché una particella non esercita una forza su sé stessa (non c'è autoforza).

Il termine

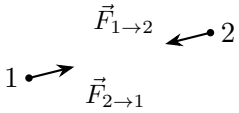
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{int}\to i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{j\to i} = \vec{0} \qquad \text{per il principio di azione e reazione:}$$

per ogni coppia i, j nella somma si ha

$$\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}.$$

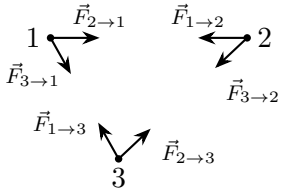
© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Due particelle.



$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{\text{int}\to i} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{1\to2} = \vec{0}$$

Es. Tre particelle.



$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{\text{int}\to i} = \underbrace{(\vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{1\to2})}_{=\vec{0}} + \underbrace{(\vec{F}_{3\to1} + \vec{F}_{1\to3})}_{=\vec{0}} + \underbrace{(\vec{F}_{2\to3} + \vec{F}_{3\to2})}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

Perciò:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{ext}\to i}}$$

In un SISTEMA ISOLATO $\vec{P}_{\text{tot}}$ è conservata.

11.5 Urti

▶ **Animazione interattiva**: urto elastico e i tre casi limite $m_1 \ll m_2$, $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$

Un urto è l'azione di forze impulsive (molto intense e di breve durata) che i corpi che si urtano esercitano l'uno sull'altro: sono quindi forze interne al sistema dei corpi che si urtano. Durante l'urto le eventuali forze esterne sono trascurabili rispetto a quelle impulsive ⇒

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE (per un sistema isolato)

- URTO ELASTICO ≡ si conserva anche l'energia cinetica (totale).
- URTO ANELASTICO ≡ non si conserva l'energia cinetica (totale).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Urto in una dimensione tra due masse m_1 e m_2.

<u>iniziale</u>: $m_1 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{1i}}$ $m_2 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{2i}}$ $\qquad P_{\text{tot, in}} = m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i}$

(URTO)

<u>finale</u>: $m_1 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{1f}}$ $m_2 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{2f}}$ $\qquad P_{\text{tot, fin}} = m_1\, v_{1f} + m_2\, v_{2f}$

La quantità di moto totale si conserva:

$$m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i} = m_1\, v_{1f} + m_2\, v_{2f}$$

Se l'urto è elastico, anche l'energia cinetica totale si conserva:

$$\frac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{2i}^2 = \frac{1}{2}\, m_1\, v_{1f}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{2f}^2$$

Es. Urto elastico con bersaglio m_2 a riposo: $v_{2i} = 0$.

$m_1 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{1i}}$ $\quad m_2 \bullet \rightsquigarrow \text{URTO} \rightsquigarrow$ $\quad m_1 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{1f}}$ $\quad m_2 \bullet\!\!\rightarrow_{v_{2f}}$

$$\begin{cases} m_1\, v_{1i} = m_1\, v_{1f} + m_2\, v_{2f} \\ m_1\, v_{1i}^2 = m_1\, v_{1f}^2 + m_2\, v_{2f}^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1i} = v_{1f} + \dfrac{m_2}{m_1}\, v_{2f} \\ v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + \dfrac{m_2}{m_1}\, v_{2f}^2 \end{cases}$$

(nella seconda equazione abbiamo moltiplicato per 2 entrambi i membri).

Vogliamo ricavare v_{1f} in termini di v_{1i}. Proviamo a eliminare v_{2f}:

$$\begin{cases} (v_{1i} - v_{1f})\, \dfrac{m_1}{m_2} = v_{2f} \\ (v_{1i}^2 - v_{1f}^2)\, \dfrac{m_1}{m_2} = v_{2f}^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (v_{1i} - v_{1f})^2\, \dfrac{m_1^2}{m_2^2} = v_{2f}^2 \\ (v_{1i}^2 - v_{1f}^2)\, \dfrac{m_1}{m_2} = v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (v_{1i} - v_{1f})^2\, \frac{m_1^2}{m_2^2} = (v_{1i}^2 - v_{1f}^2)\, \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow \quad (v_{1i} - v_{1f})^2\, \frac{m_1}{m_2} = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f})$$

$$\Rightarrow \quad (v_{1i} - v_{1f})\, \frac{m_1}{m_2} = v_{1i} + v_{1f}$$

Differenza di quadrati

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo diviso per $(v_{1i} - v_{1f})$, il che è lecito se $v_{1f} \neq v_{1i}$.[4]

$$\Rightarrow \quad -\, v_{1f}\, \frac{m_1}{m_2} - v_{1f} = v_{1i} - \frac{m_1}{m_2}\, v_{1i}$$

$$\Rightarrow \quad -\, v_{1f}\, \frac{m_1 + m_2}{m_2} = v_{1i}\, \frac{m_2 - m_1}{m_2}$$

[4] La soluzione $v_{1f} = v_{1i}$, $v_{2f} = 0$ soddisfa entrambe le equazioni, ma corrisponde al caso in cui l'urto non avviene.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}} \qquad \begin{aligned} &\text{se } m_2 = 0, && v_{1f} = v_{1i} \\ &\text{se } m_2 \to \infty, && v_{1f} = -v_{1i} \quad \text{(RIMBALZO)} \\ &\text{se } m_1 = m_2, && v_{1f} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2f} &= (v_{1i} - v_{1f})\,\frac{m_1}{m_2} = \Big[v_{1i} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}\Big]\frac{m_1}{m_2} \\ &= \frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}\, \frac{m_1}{m_2} = \frac{2\,\cancel{m_2}}{m_1 + m_2}\, v_{1i}\, \frac{m_1}{\cancel{m_2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{2f} = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i}}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

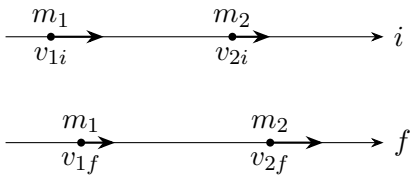
Lezione 12

Lunedì 2 novembre 2026

12.1 Urto elastico con entrambe le masse in moto

▶ **Animazione interattiva**: l'urto visto dai due sistemi di riferimento O e O'

Come si fa il calcolo se $v_{2i} \neq 0$? (Il caso con bersaglio fermo, $v_{2i} = 0$, è nel § 11.5.)

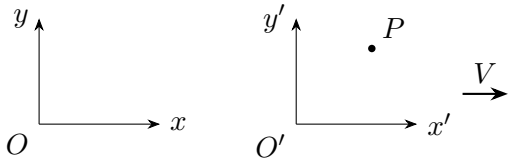


$$\begin{aligned} &\text{CONS. } P_{\text{tot}}: \\ &\text{CONS. } K_{\text{tot}}: \end{aligned} \quad \begin{cases} m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i} = m_1\, v_{1f} + m_2\, v_{2f} \\ \dfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2 + \dfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2i}^2 = \dfrac{1}{2}\, m_1\, v_{1f}^2 + \dfrac{1}{2}\, m_2\, v_{2f}^2 \end{cases}$$

Si può risolvere direttamente questo sistema, ma c'è un modo più furbo: cambiare sistema di riferimento.

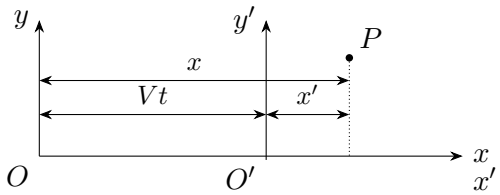
Trasformazione di Galileo

TRASFORMAZIONE DI GALILEO: trasformazione tra 2 sistemi di riferimento (SR) inerziali.



Le coordinate di P in O' come sono legate a quelle dello stesso punto P in O?

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - V\, t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$



Concentriamoci su $x' = x - V\, t$. Se $x' = x'(t)$ e $x = x(t)$, cioè descriviamo il moto di una particella nei due SR, possiamo calcolare la derivata temporale (cioè la velocità nei due SR):

$$\boxed{v' = v - V}$$

Per l'accelerazione:

$$\boxed{a' = a} \qquad \text{perché } V \text{ è costante}$$

$$\Downarrow$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$F' = F \quad \Rightarrow \quad \text{LA DINAMICA NON CAMBIA}$$

In generale, usando i vettori:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &\equiv \text{vettore posizione della particella nel SR } O \\ \vec{r}\,'(t) &\equiv \text{vettore posizione della particella nel SR } O' \\ \vec{V} &\equiv \text{velocità relativa tra } O \text{ e } O' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{V}\,t} \qquad \text{trasformazione di Galileo}$$

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

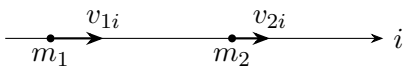
$$\boxed{\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}} \qquad \text{legge di composizione delle velocità}$$

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}\,'(t) = \vec{a}(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \vec{F}\,'}$$

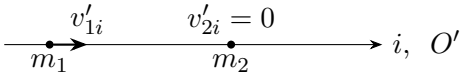
Ritorno all'urto

Quindi, tornando al problema della collisione tra 2 masse inizialmente in movimento:



Facciamo qui una trasformazione di Galileo $O \longrightarrow O'$, dove O' si muove con velocità v_{2i}. In O' avremo:

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{2i}, \qquad v'_{2i} = 0$$



Stesso calcolo di prima $\Rightarrow v'_{1f}$ e $v'_{2f} \Rightarrow$ aggiungendo v_{2i} si trova il risultato in O:

$$v_{1f} = v'_{1f} + v_{2i}, \qquad v_{2f} = v'_{2f} + v_{2i}.$$

Usando le formule della Sezione 12.1 con $v'_{1i} = v_{1i} - v_{2i}$:

$$v'_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,(v_{1i} - v_{2i}), \qquad v'_{2f} = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,(v_{1i} - v_{2i})$$

e quindi, tornando in O:

$$v_{1f} = v'_{1f} + v_{2i} = \frac{(m_1 - m_2)(v_{1i} - v_{2i}) + (m_1 + m_2)\,v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\,v_{1i} + 2\,m_2\,v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2f} = v'_{2f} + v_{2i} = \frac{2\,m_1\,(v_{1i} - v_{2i}) + (m_1 + m_2)\,v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{2\,m_1\,v_{1i} + (m_2 - m_1)\,v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Verifica: il calcolo esplicito

Risolviamo ora direttamente, in O, il sistema delle due leggi di conservazione. Moltiplichiamo per 2 la seconda equazione e raccogliamo a sinistra i termini con m_1 e a destra quelli con m_2:

$$\begin{cases} m_1\,(v_{1i} - v_{1f}) = m_2\,(v_{2f} - v_{2i}) & (1) \\ m_1\,(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2\,(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) & (2) \end{cases}$$

Con la differenza di quadrati, la (2) diventa

$$m_1\,(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2\,(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}).$$

Dividiamo membro a membro per la (1) (lecito se $v_{1f} \neq v_{1i}$, cioè se l'urto avviene):

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{1f} - v_{2f} = -\,(v_{1i} - v_{2i})}$$

In un urto elastico in una dimensione la velocità relativa delle due masse cambia segno ma non modulo.

Ricaviamo $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}$ e sostituiamo nella (1):

$$\begin{aligned} & m_1\,v_{1i} - m_1\,v_{1f} = m_2\,(v_{1i} + v_{1f} - 2\,v_{2i}) \\ \Rightarrow \quad & (m_1 + m_2)\,v_{1f} = (m_1 - m_2)\,v_{1i} + 2\,m_2\,v_{2i} \\ \Rightarrow \quad & \boxed{v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)\,v_{1i} + 2\,m_2\,v_{2i}}{m_1 + m_2}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} v_{2f} = v_{1i} - v_{2i} + v_{1f} &= \frac{(m_1 + m_2)(v_{1i} - v_{2i}) + (m_1 - m_2)\,v_{1i} + 2\,m_2\,v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2\,m_1\,v_{1i} + (m_2 - m_1)\,v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{2f} = \frac{2\,m_1\,v_{1i} + (m_2 - m_1)\,v_{2i}}{m_1 + m_2}} \end{aligned}$$

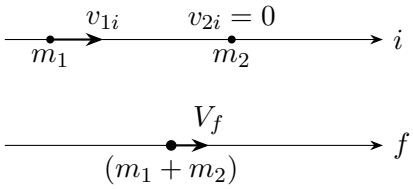
Sono esattamente le stesse velocità trovate con la trasformazione di Galileo. Per $v_{2i} = 0$ si ritrovano le formule della Sezione 12.1.

Il motivo per cui le due strade danno lo stesso risultato è che le leggi di conservazione hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In particolare la relazione $v_{1f} - v_{2f} = -(v_{1i} - v_{2i})$ contiene solo differenze di velocità, che non cambiano passando da O a O' ($v'_1 - v'_2 = (v_1 - V) - (v_2 - V) = v_1 - v_2$).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

12.2 Urto totalmente anelastico

▶ **Animazione interattiva**: urto totalmente anelastico tra due auto, con l'energia dissipata



a seguito dell'urto le masse rimangono incastrate l'una nell'altra.

Conservazione della quantità di moto totale:

$$m_1\, v_{1i} = (m_1 + m_2)\, V_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i}}$$

La K_{tot} non si conserva:

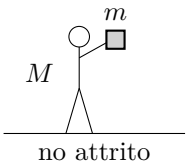
$$K_{\text{tot},i} = \frac{1}{2}\, m_1\, v_{1i}^2$$
$$K_{\text{tot},f} = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, V_f^2 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\, v_{1i}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}^2$$

Quindi

$$\Delta K = K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1\Big) v_{1i}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1^2 - m_1^2 - m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}^2$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}^2$$

ΔK non può essere $= 0$ (perché se lo fosse $\Rightarrow m_2 = 0$ o $v_{1i} = 0$, ed entrambe le opzioni implicano un non urto).

Es. Una persona di massa M, ferma su una superficie senza attrito, lancia una massa m con velocità v. Con quale velocità V si muove la persona?



$M = 80\,\text{kg}$
$m = 20\,\text{kg}$
$v = 3{,}0\,\text{m/s}$
$V = ?$

$\vec{P}_{\text{tot},i} = \vec{0}$
$\vec{P}_{\text{tot},f} = \vec{0}$

$$M\,V + m\,v = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{m}{M}\,v \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{20\,\text{kg}}{80\,\text{kg}} \cdot 3{,}0\,\text{m/s}$$
$$\Rightarrow \quad V = -0{,}25 \cdot 3{,}0\,\text{m/s} = -0{,}75\,\text{m/s}$$

(il segno meno indica che la persona si muove in verso opposto alla massa lanciata).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Un'auto di massa $M = 1500\,\text{kg}$ con velocità $V_i = 15\,\text{m/s}$ urta un'auto ferma di massa $m = 1000\,\text{kg}$; dopo l'urto le due auto restano incastrate.

$$M\,V_i = (m+M)\,V_f \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{M\,V_i}{m+M}$$

$$\Rightarrow \quad V_f = \frac{1500\,\text{kg}}{2500\,\text{kg}} \cdot 15\,\text{m/s} = 9{,}0\,\text{m/s}$$

$$K_i = \frac{1}{2}\,M\,V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1500\,\text{kg} \cdot (15)^2\,\text{m}^2/\text{s}^2 \approx 170\,\text{kJ}$$

$$K_f = \frac{1}{2}\,(m+M)\,V_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 2500\,\text{kg} \cdot (9{,}0)^2\,\text{m}^2/\text{s}^2 \approx 100\,\text{kJ}$$

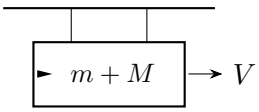
$$\Rightarrow \quad \Delta K \approx -70\,\text{kJ} \qquad \text{(questi 70 kJ sono andati in calore)}$$

▶ **Animazione interattiva**: il pendolo balistico, con masse e velocità regolabili

Es. Pendolo balistico. Un proiettile di massa m e velocità v si conficca in un blocco di massa M appeso a due fili; il blocco (con il proiettile) sale di un'altezza h.

Nell'urto (totalmente anelastico) si conserva la quantità di moto:

$$P_i = m\,v$$
$$P_f = (m+M)\,V$$



$$V = \frac{m}{m+M}\,v$$

Per la conservazione dell'energia meccanica (dopo l'urto):

$$\frac{1}{2}\,(m+M)\,V^2 = (m+M)\,g\,h$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,\cancel{(m+M)}\,\frac{m^2}{(m+M)^2}\,v^2 = \cancel{(m+M)}\,g\,h$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2\,g\,h\,\frac{(m+M)^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{m+M}{m}\,\sqrt{2\,g\,h}}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Pendolo balistico con $m = 10\,\text{g}$, $M = 2\,\text{kg}$, $h = 5\,\text{cm}$ (e $g \approx 10\,\text{m/s}^2$).

$$v = \frac{10\,\text{g} + 2000\,\text{g}}{10\,\text{g}} \sqrt{2 \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 5\,\text{cm}} = \frac{2010}{10} \sqrt{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \times 10^{-2}\,\text{m}}$$
$$= 201 \cdot \sqrt{1}\,\text{m/s} \approx 200\,\text{m/s}$$

Energia cinetica dissipata:

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m+M)\,V^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2, \qquad V = \frac{m}{m+M}\,v$$

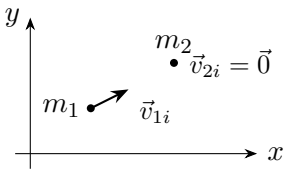
$$\Rightarrow \quad \Delta K = \frac{1}{2}(m+M)\,\frac{m^2}{(m+M)^2}\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{\Delta K}{\frac{1}{2}\,m\,v^2} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{m^2}{m+M}\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,v^2}{\frac{1}{2}\,m\,v^2}$$
$$= \frac{m}{m+M} - 1 = \frac{m - (m+M)}{m+M} = -\frac{M}{m+M}$$
$$\left|\frac{\Delta K}{K_i}\right| = \frac{M}{m+M} = \frac{2\,\text{kg}}{10\,\text{g} + 2\,\text{kg}} = 0{,}995$$

$\Rightarrow$ il 99,5 % dell'energia iniziale viene dissipato in calore.

12.3 Urti in 2 dimensioni (biliardo)

▶ **Animazione interattiva**: urto elastico nel piano tra due biglie uguali



$$\vec{P}_{\text{tot},i} = m_1\,\vec{v}_{1i} + m_2\,\vec{v}_{2i}$$
$$\vec{P}_{\text{tot},f} = m_1\,\vec{v}_{1f} + m_2\,\vec{v}_{2f}$$

Conservazione $\vec{P}_{\text{tot}}$: $\vec{P}_{\text{tot},i} = \vec{P}_{\text{tot},f}$

$$\Rightarrow \quad m_1\,\vec{v}_{1i} + m_2\,\vec{v}_{2i} = m_1\,\vec{v}_{1f} + m_2\,\vec{v}_{2f}$$

Urto elastico: $K_{\text{tot},i} = K_{\text{tot},f}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,m_1\,|\vec{v}_{1i}|^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,|\vec{v}_{2i}|^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,|\vec{v}_{1f}|^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,|\vec{v}_{2f}|^2$$

In componenti:

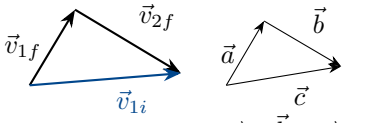
$$\begin{cases} m_1\,v_{1i,x} + m_2\,v_{2i,x} = m_1\,v_{1f,x} + m_2\,v_{2f,x} \\ m_1\,v_{1i,y} + m_2\,v_{2i,y} = m_1\,v_{1f,y} + m_2\,v_{2f,y} \\ \frac{1}{2}\,m_1(v_{1i,x}^2 + v_{1i,y}^2) + \frac{1}{2}\,m_2(v_{2i,x}^2 + v_{2i,y}^2) = \frac{1}{2}\,m_1(v_{1f,x}^2 + v_{1f,y}^2) + \frac{1}{2}\,m_2(v_{2f,x}^2 + v_{2f,y}^2) \end{cases}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Masse uguali, $m_1 = m_2 = m$, bersaglio fermo: $\vec{v}_{2i} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} m\,\vec{v}_{1i} = m\,\vec{v}_{1f} + m\,\vec{v}_{2f} \\ \dfrac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_{1i}|^2 = \dfrac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_{1f}|^2 + \dfrac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_{2f}|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \\ |\vec{v}_{1i}|^2 = |\vec{v}_{1f}|^2 + |\vec{v}_{2f}|^2 \end{cases}$$



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
$c^2 = a^2 + b^2$

I tre vettori formano un triangolo che soddisfa il teorema di Pitagora: è un triangolo rettangolo, con $\vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f}$.

Oppure, facendo il prodotto scalare della prima equazione con sé stessa:

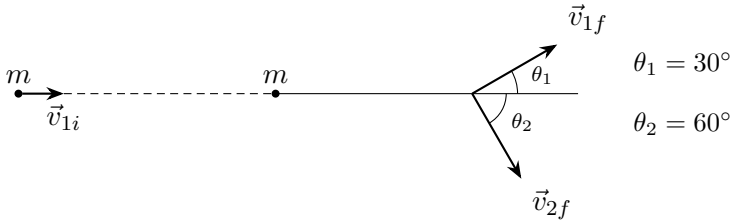
$$\vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{1i} = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot \vec{v}_{1i} = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \cancel{|\vec{v}_{1i}|^2} &= \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} + \vec{v}_{2f} \cdot \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \cdot \vec{v}_{2f} \\ &= \cancel{|\vec{v}_{1f}|^2} + 2\,\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} + \cancel{|\vec{v}_{2f}|^2} \end{aligned}$$

(le cancellazioni usano la seconda equazione, $|\vec{v}_{1i}|^2 = |\vec{v}_{1f}|^2 + |\vec{v}_{2f}|^2$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{2\,\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f}$$

Es. Una massa m con $|\vec{v}_{1i}| = 2\,\mathrm{m/s}$ urta elasticamente una massa uguale ferma. Dopo l'urto $\vec{v}_{1f}$ forma un angolo $\theta_1 = 30°$ con la direzione iniziale e $\vec{v}_{2f}$ un angolo $\theta_2 = 60°$ (dalla parte opposta).



$\theta_1 = 30°$
$\theta_2 = 60°$

$$\begin{array}{ll} \text{lungo } x: & \begin{cases} v_{1i,x} = v_{1f,x} + v_{2f,x} \\ 0 = v_{1f,y} + v_{2f,y} \\ |\vec{v}_{1i}|^2 = |\vec{v}_{1f}|^2 + |\vec{v}_{2f}|^2 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{c} v_{1f,x} = |\vec{v}_{1f}| \cos\theta_1 \\ \vdots \end{array}$$

lungo y :
cons. K_{tot} :

Trovare $|\vec{v}_{1f}|$ e $|\vec{v}_{2f}|$. Esercizio.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 13

Venerdì 6 novembre 2026

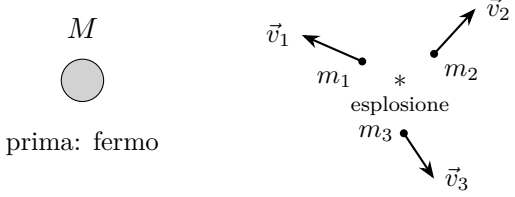
13.1 Conservazione della quantità di moto totale: esempi

Nel § 11.4 abbiamo visto che

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{ext}\to i},$$

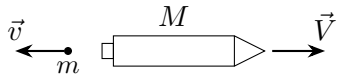
perché le forze interne si annullano a coppie (azione e reazione). In un SISTEMA ISOLATO (non agiscono forze esterne) $\vec{P}_{\text{tot}}$ è quindi costante: conservazione della quantità di moto totale.

Es. Esplosione di un corpo di massa M in tre frammenti (in assenza di forze esterne).



$$\vec{P}_{\text{tot},i} = \vec{0} \quad \text{(iniziale)}$$
$$\vec{P}_{\text{tot},f} = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 + m_3\,\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Es. Un razzo di massa M, inizialmente fermo (razzo spento), espelle una massa m con velocità $\vec{v}$.

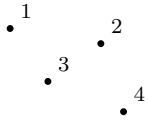


$$\vec{P}_{\text{tot},i} = \vec{0}$$
$$\vec{P}_{\text{tot},f} = m\,\vec{v} + M\,\vec{V} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = -\frac{m}{M}\,\vec{v}}$$

13.2 Centro di massa

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i, \qquad \vec{p}_i = m_i\,\vec{v}_i$$

Scriviamo $\vec{P}_{\text{tot}}$ come la quantità di moto di un'unica particella che ha tutta la massa del sistema:



$$\vec{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}}\,\vec{V}, \qquad M_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Quindi:

$$M_{\text{tot}}\,\vec{V} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i$$

Ora, $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$:

$$\vec{V} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i \right)}_{\vec{r}_{\text{CM}}}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

$$\boxed{\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$ posizione del CENTRO DI MASSA

Quindi $\vec{V}$ è $\vec{V}_{\text{CM}}$, la velocità del centro di massa.

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}} \vec{V}_{\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = M_{\text{tot}} \frac{d\vec{V}_{\text{CM}}}{dt} = M_{\text{tot}} \vec{A}_{\text{CM}}$$

e $\dfrac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$ (somma di tutte le forze esterne). Quindi si ha:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = M_{\text{tot}} \vec{A}_{\text{CM}}}$$

IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE COME UNA PARTICELLA PUNTIFORME DI MASSA M_{TOT} SOGGETTA ALLA SOMMA DI TUTTE LE FORZE ESTERNE.

NOTA: in $\vec{r}_{\text{CM}}$ non necessariamente c'è massa.

Es. Due masse su una retta.

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

se $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{\text{CM}} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

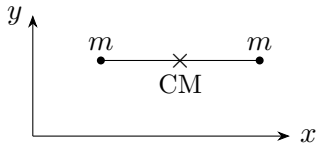
se $m_1 \gg m_2 \Rightarrow x_{\text{CM}} \approx x_1$

Con $m_1 = 2\,\text{kg}$, $x_1 = 3\,\text{m}$ e $m_2 = 3\,\text{kg}$, $x_2 = 4\,\text{m}$:

$$x_{\text{CM}} = \frac{2\,\text{kg} \cdot 3\,\text{m} + 3\,\text{kg} \cdot 4\,\text{m}}{2\,\text{kg} + 3\,\text{kg}} = \frac{6+12}{5}\,\text{m} = \frac{18}{5}\,\text{m} = 3{,}6\,\text{m}$$

(più vicino a x_2, perché $m_2 > m_1$).

NOTA: $\vec{r}_{\text{CM}}$ è un vettore. La sua posizione non dipende dalla scelta del sistema di riferimento; le sue componenti sì.

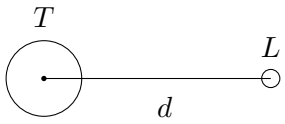


Comunque scegliamo di posizionare il sistema di riferimento, il CM sarà sempre nel punto medio.

Es. Terra–Luna.

▶ **Animazione interattiva**: la Terra e la Luna che ruotano attorno al centro di massa comune

$$M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$$
$$M_L = 7{,}35 \times 10^{22}\,\text{kg}$$
$$d = 3{,}84 \times 10^{8}\,\text{m}$$



Scegliamo un sistema di riferimento con origine nel centro della Terra:

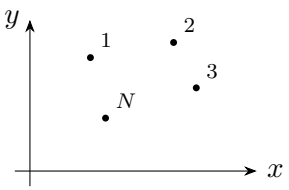
$$x_{\text{CM}} = \frac{M_T \cdot 0 + M_L \cdot d}{M_T + M_L} = \frac{M_L}{M_T + M_L}\, d \approx 4\,670\,\text{km}$$

che è $< R_\oplus$: il CM si trova dentro la Terra.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

13.3 Centro di massa in due dimensioni

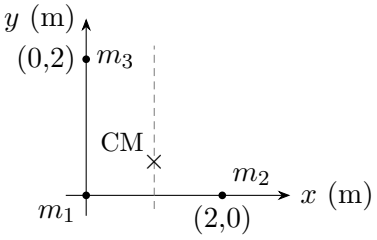
▶ **Animazione interattiva**: tre masse e l'origine degli assi da trascinare, con il centro di massa



$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Es. Tre masse: $m_1 = 1\,\text{kg}$ in $(0,0)$, $m_2 = 2\,\text{kg}$ in $(2,0)\,\text{m}$, $m_3 = 1\,\text{kg}$ in $(0,2)\,\text{m}$.



$$x_{\text{CM}} = \frac{m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m} + 1\,\text{kg} \cdot 0\,\text{m}}{4\,\text{kg}} = 1\,\text{m}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2\,\text{kg} \cdot 0\,\text{m} + 1\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m}}{4\,\text{kg}} = 0{,}5\,\text{m}$$

(m_1 sta nell'origine e non contribuisce ai numeratori.)

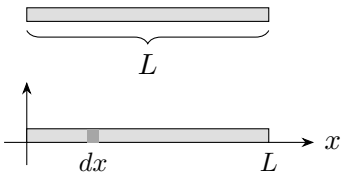
13.4 Centro di massa di un corpo continuo

▶ **Animazione interattiva**: asta con densità $\lambda(x)$ regolabile, appoggiata su un fulcro

Se il corpo è un continuo, la somma $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \longrightarrow \int$:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int \vec{r}\, dm; \qquad dm = \begin{cases} \lambda\, dx & \text{in 1d,} \quad \lambda = \text{densità lineare di massa} \\ \sigma\, dA & \text{in 2d,} \quad \sigma = \text{densità superficiale di massa} \end{cases}$$

Es. Asta di lunghezza L.



Se è omogenea, per simmetria il CM sta nel punto medio.
dx è un elemento infinitesimo di lunghezza dell'asta.
Quanta massa ha? $dm = \lambda\, dx$.
λ è una caratteristica del materiale di cui è formata l'asta: λ costante $\Rightarrow$ asta omogenea.

$$M_{\text{tot}} = \underbrace{\int dm}_{\text{corrisponde a } \sum_i m_i} = \int_0^L \lambda\, dx = \lambda L$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{\lambda L} \int x\, dm = \frac{1}{\lambda L} \int_0^L x\, \lambda\, dx = \frac{1}{L} \frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{1}{L} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

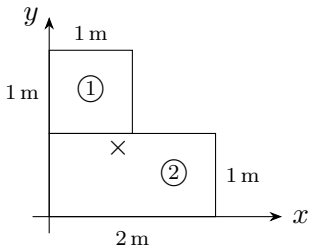
Es. Se $\lambda = \lambda(x) = a\,x$ ($a > 0$, costante): l'asta è più densa verso l'estremo $x = L$.

$$M_{\text{tot}} = \int dm = \int_0^L \lambda(x)\,dx = \int_0^L a\,x\,dx = a\,\frac{L^2}{2}$$

$$M_{\text{tot}}\,x_{\text{CM}} = \int x\,dm = \int_0^L x\,\lambda(x)\,dx = \int_0^L a\,x^2\,dx = a\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^L = a\,\frac{L^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}}\,a\,\frac{L^3}{3} = \frac{1}{a\,\frac{L^2}{2}}\,a\,\frac{L^3}{3} = \frac{2}{3}\,L$$

Es. Due pezzi di lamiera, fatta dello stesso materiale. Dove si trova il CM della composizione delle due lamiere? La lamiera è omogenea ⇒ il CM di ciascun pezzo si trova nel centro geometrico della figura.



$$x_{\text{CM}}^{(1)} = 0{,}5\,\text{m}, \quad y_{\text{CM}}^{(1)} = 1{,}5\,\text{m}$$

$$x_{\text{CM}}^{(2)} = 1{,}0\,\text{m}, \quad y_{\text{CM}}^{(2)} = 0{,}5\,\text{m}$$

Il problema si traduce nel calcolare il CM di un sistema di due particelle: m_1 in $(0{,}5;\,1{,}5)\,\text{m}$ e m_2 in $(1{,}0;\,0{,}5)\,\text{m}$.

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2}, \qquad y_{\text{CM}} = \frac{m_1\,y_1 + m_2\,y_2}{m_1 + m_2}$$

Non conosciamo m_1, m_2; tuttavia le lamiere sono fatte dello stesso materiale e sono omogenee:

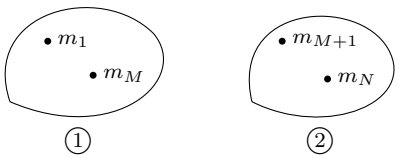
$$\Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{A_2}{A_1}; \qquad A_1 = 1{,}0\,\text{m}^2,\ A_2 = 2{,}0\,\text{m}^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2{,}0\,m_1$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot 0{,}5\,\text{m} + \overbrace{2{,}0\,m_1}^{m_2} \cdot 1{,}0\,\text{m}}{m_1 + 2{,}0\,m_1} = \frac{0{,}5\,\text{m} + 2{,}0\,\text{m}}{3{,}0} = \frac{2{,}5}{3{,}0}\,\text{m} \approx 0{,}83\,\text{m}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot 1{,}5\,\text{m} + 2{,}0\,m_1 \cdot 0{,}5\,\text{m}}{3{,}0\,m_1} = \frac{2{,}5}{3{,}0}\,\text{m} = x_{\text{CM}} \approx 0{,}83\,\text{m}$$

13.5 Il centro di massa si può calcolare "a pezzi"

Il centro di massa di un sistema di N particelle può essere calcolato "a pezzi". Dividiamo le N particelle in 2 gruppi, ① e ②.



$$\vec{r}_{\text{CM}}^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{M} m_i}, \quad M_{\text{tot}}^{(1)} = \sum_{i=1}^{M} m_i; \qquad \vec{r}_{\text{CM}}^{(2)} = \frac{\sum_{i=M+1}^{N} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{i=M+1}^{N} m_i}, \quad M_{\text{tot}}^{(2)} = \sum_{i=M+1}^{N} m_i$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Ora tratto i 2 gruppi come due particelle di massa $M_{\text{tot}}^{(1)}$ e $M_{\text{tot}}^{(2)}$ e posizioni $\vec{r}_{\text{CM}}^{(1)}$ e $\vec{r}_{\text{CM}}^{(2)}$. Qual è il loro CM?

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{M_{\text{tot}}^{(1)}\,\vec{r}_{\text{CM}}^{(1)} + M_{\text{tot}}^{(2)}\,\vec{r}_{\text{CM}}^{(2)}}{M_{\text{tot}}^{(1)} + M_{\text{tot}}^{(2)}} = \frac{\cancel{M_{\text{tot}}^{(1)}}\,\frac{\sum_{i=1}^{M} m_i\,\vec{r}_i}{\cancel{M_{\text{tot}}^{(1)}}} + \cancel{M_{\text{tot}}^{(2)}}\,\frac{\sum_{i=M+1}^{N} m_i\,\vec{r}_i}{\cancel{M_{\text{tot}}^{(2)}}}}{\sum_{i=1}^{M} m_i + \sum_{i=M+1}^{N} m_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i\,\vec{r}_i + \sum_{i=M+1}^{N} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

che è il CM di tutte le N particelle. È quello che abbiamo fatto con le due lamiere.

13.6 Proiettile che esplode in volo

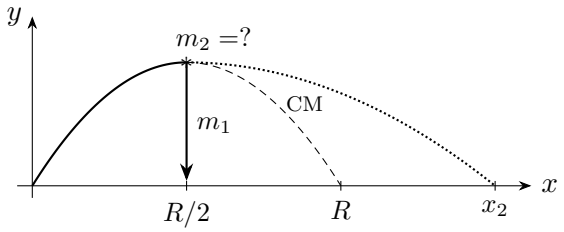
▶ **Animazione interattiva**: il proiettile che esplode, con rapporto tra le masse e velocità di un frammento regolabili

$$\boxed{M_{\text{tot}}\,\vec{A}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt}}$$

Es. Un proiettile viene lanciato con $v_0 = 20\,\text{m/s}$ e $\theta = 45°$ (moto parabolico, con $\vec{g}$ verso il basso).

$$R\ (\text{gittata}) = \frac{v_0^2}{g}\,\sin(2\theta) = \frac{v_0^2}{g} \approx 41\,\text{m}$$

Supponiamo che nel punto più alto della traiettoria il proiettile esploda, in due frammenti uguali. Un frammento cade verticalmente $\Rightarrow R_1 = R/2 \approx 20\,\text{m}$. Dove va a finire l'altro frammento?



L'esplosione è dovuta a forze <u>interne</u> $\Rightarrow$ il moto del CM non è modificato: il CM continua a muoversi sulla parabola originale (finché nessuno dei frammenti tocca terra).

Quindi $x_{\text{CM}} = R$ quando i frammenti arrivano a terra (e ci arrivano insieme, perché partono dalla stessa quota con velocità verticale nulla). D'altra parte

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2} \overset{(m_1=m_2)}{=} \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{R/2 + x_2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R/2 + x_2}{2} = R \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{2} + x_2 = 2R \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{3}{2}\,R \approx 61\,\text{m}}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

13.7 Energia cinetica di un sistema: teorema di König

▶ **Animazione interattiva**: due blocchi visti dal laboratorio e dal centro di massa, con $\frac{1}{2}M_{\text{tot}}V_{\text{CM}}^2$ e K'

Es. Due blocchi di massa m si muovono l'uno verso l'altro con velocità opposte.

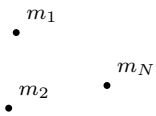
$$\vec{P}_{\text{tot}} = m\,\vec{v} - m\,\vec{v} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \vec{V}_{\text{CM}} = \vec{0}.\ \text{Il CM è fermo!}$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}}\,\vec{V}_{\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{\text{CM}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{CM}} = \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2 = 0.$$

Tuttavia

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,m\,v^2 = m\,v^2 \neq 0.$$

Quindi l'energia cinetica di un sistema di N particelle non è l'energia cinetica del centro di massa.



$$\vec{v}_i = \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'$$

$\vec{v}_i$: velocità della particella i in un SR generico;
$\vec{V}_{\text{CM}}$: velocità del centro di massa;
$\vec{v}_i\,'$: velocità della particella i rispetto al centro di massa.

Si ha

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{V}_{\text{CM}}$$
$$= \vec{P}_{\text{tot}} - \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i\Big)}_{M_{\text{tot}}}\vec{V}_{\text{CM}} = \vec{P}_{\text{tot}} - M_{\text{tot}}\,\vec{V}_{\text{CM}} = \vec{0}$$

(questo risultato vale sempre, anche in presenza di forze esterne: discende solo dalla definizione di $\vec{V}_{\text{CM}}$).

⇒ Nel SR del CM (dove il CM è fermo) la quantità di moto totale è sempre nulla:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\,' = \vec{P}_{\text{tot}}\,' = \vec{0} \qquad \text{(quantità di moto totale nel SR del CM)}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Ora calcoliamo l'energia cinetica:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2; \qquad \vec{v}_i = \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'\right) \cdot \left(\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{V}_{\text{CM}} \cdot \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{V}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}_i\,' + \vec{v}_i\,' \cdot \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,' \cdot \vec{v}_i\,'\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i V_{\text{CM}}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}_i\,' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (v_i\,')^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} M_{\text{tot}} V_{\text{CM}}^2}_{\substack{\text{energia cinetica} \\ \text{del CM}}} + \vec{V}_{\text{CM}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,'\right)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (v_i\,')^2}_{\substack{\equiv K' \text{ (energia cinetica} \\ \text{dei moti interni)}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} V_{\text{CM}}^2 + K'} \qquad \textsc{Teorema di König}$$

Nell'esempio dei due blocchi, $V_{\text{CM}} = 0$ e tutta l'energia cinetica è energia dei moti interni: $K = K' = m v^2$.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 14

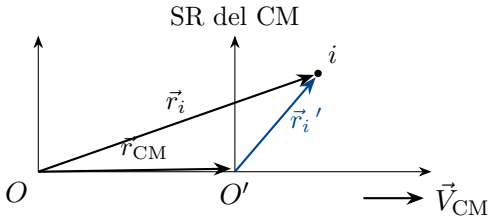
Lunedì 9 novembre 2026

14.1 Teorema di König: conseguenze

Nel § 13.2 abbiamo visto che $\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$ (somma vettoriale di tutte le forze esterne agenti sul sistema), con $\vec{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}}\,\vec{V}_{\text{CM}}$. Quindi

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad &\Rightarrow \quad \vec{P}_{\text{tot}} \text{ è costante (conservato)} \\ &\Rightarrow \quad \vec{V}_{\text{CM}} \text{ è costante} \\ &\Rightarrow \quad \text{il CM si muove di moto rettilineo uniforme.} \end{aligned}$$

In questo caso è comodo scegliere il sistema di riferimento del CM: il SR del CM è inerziale se $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.



La relazione $\vec{v}_i = \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'$ usata nel § 13.7 viene dalla figura:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_i\,'$$

e, derivando rispetto al tempo,

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'.$$

Con questa relazione abbiamo dimostrato (§ 13.7) che $\vec{P}_{\text{tot}}\,' = \vec{0}$ e il teorema di König:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2 + K'} \qquad (K' = \text{energia cinetica calcolata nel SR del CM}).$$

Come $\vec{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}}\,\vec{V}_{\text{CM}}$, anche questa è un'identità cinematica: discende solo dalle definizioni, e vale qualunque siano le forze in gioco.

Se $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{\text{CM}}$ è costante $\Rightarrow \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2$ è costante.

$$\Rightarrow \text{ le forze interne possono modificare solo } K'.$$

Applicazione agli urti

Negli urti ci sono solamente forze interne (§ 11.5):

$$K_0 = \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2 + K_0', \qquad K_f = \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2 + K_f'$$

- urto ELASTICO: $K_0 = K_f \;\Rightarrow\; K_0' = K_f'$;
- urto ANELASTICO: $K_0 \neq K_f \;\Rightarrow\; K_0' \neq K_f'$. In particolare $K_0' > K_f'$, quindi

$$\Delta K = K_f - K_0 = K_f' - K_0' < 0.$$

La dissipazione maggiore possibile avviene quando $K_f' = 0$ (tutta l'energia cinetica nel SR del CM viene dissipata) $\Rightarrow$ urto totalmente anelastico.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Due corpi, m_1 e m_2, con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Definiamo la VELOCITÀ RELATIVA

$$\vec{v}_{\text{rel}} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \qquad \vec{V}_{\text{CM}} = \frac{m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2}{M_{\text{tot}}}, \qquad M_{\text{tot}} = m_1 + m_2.$$

Da $\vec{v}_1 = \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_1\,'$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1\,' = \vec{v}_1 - \vec{V}_{\text{CM}} &= \vec{v}_1 - \frac{m_1}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_1 - \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1\,\frac{M_{\text{tot}} - m_1}{M_{\text{tot}}} - \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_2 \\ &= \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_1 - \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_2 = \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\,(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_{\text{rel}}\end{aligned}$$

Per $\vec{v}_2\,'$ usiamo $\vec{P}_{\text{tot}}\,' = m_1\,\vec{v}_1\,' + m_2\,\vec{v}_2\,' = \vec{0}$:

$$\vec{v}_2\,' = -\frac{m_1}{m_2}\,\vec{v}_1\,' = -\frac{m_1}{M_{\text{tot}}}\,\vec{v}_{\text{rel}}.$$

L'energia cinetica nel SR del CM è

$$\begin{aligned}K' &= \frac{1}{2}\,m_1\,(v_1')^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,(v_2')^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,\frac{m_2^2}{M_{\text{tot}}^2}\,v_{\text{rel}}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\frac{m_1^2}{M_{\text{tot}}^2}\,v_{\text{rel}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M_{\text{tot}}^2}\,v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2\,(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}\,v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}}_{\equiv\,\mu}\,v_{\text{rel}}^2\end{aligned}$$

dove μ è la MASSA RIDOTTA. Quindi

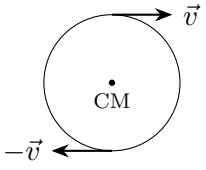
$$\boxed{K = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,V_{\text{CM}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\,\mu\,v_{\text{rel}}^2}_{K'}}$$

L'urto è totalmente anelastico quando $K_f' = 0 \Rightarrow$ la velocità relativa finale è nulla (i due corpi proseguono insieme). L'energia dissipata è quindi

$$\Delta K = K_f' - K_0' = -\frac{1}{2}\,\mu\,v_{\text{rel},0}^2,$$

che è il risultato trovato nel § 12.2 (lì m_2 era ferma, quindi $v_{\text{rel},0} = v_{1i}$).

14.2 Momento torcente e momento angolare di un punto



Es. Una ruota imperniata nel CM è in rotazione. Il CM è fermo, $\vec{V}_{\text{CM}} = \vec{0}$; tuttavia $K' \neq 0$. C'è un moto interno, di rotazione. Come lo trattiamo?

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Momento torcente

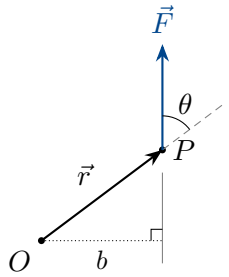
▶ **Animazione interattiva**: la chiave inglese, con forza, lunghezza e angolo regolabili

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

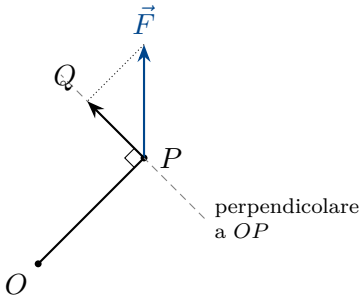
è il MOMENTO TORCENTE della forza $\vec{F}$, applicata nel punto P, calcolato rispetto al POLO O ($\vec{r}$ va da O a P). Il modulo è

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\sin\theta = |\vec{F}|\,b,$$

dove $b \equiv |\vec{r}|\sin\theta$ è il BRACCIO DELLA FORZA, cioè la distanza di O dalla retta su cui agisce $\vec{F}$.



$$[\tau] = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \qquad \text{(non J: il momento torcente non è un lavoro)}$$

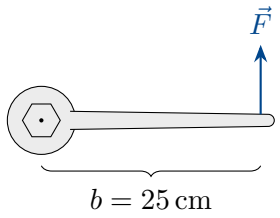


Si può leggere $|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,(|\vec{F}|\sin\theta)$ anche così: il segmento

$$\overline{PQ} = |\vec{F}|\cos\Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big) = |\vec{F}|\sin\theta$$

è la componente di $\vec{F}$ trasversale rispetto a $\overline{OP}$, quindi descrive quella porzione di $\vec{F}$ responsabile per le rotazioni di P intorno a O. La componente lungo $\overline{OP}$ non fa ruotare P.

Es. Chiave inglese, con $|\vec{F}| = 100\,\mathrm{N}$ e braccio $b = 25\,\mathrm{cm}$.



$$\tau = F\,b = 100\,\mathrm{N}\cdot 0{,}25\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Se $\vec{F}$ (sempre con $|\vec{F}| = 100\,\mathrm{N}$) forma un angolo θ con la perpendicolare alla chiave:

$$\tau = F\,b\cos\theta$$

(per $\theta = 0$ si ritrova il caso precedente; per $\theta = 90°$ la forza tira lungo la chiave e $\tau = 0$).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

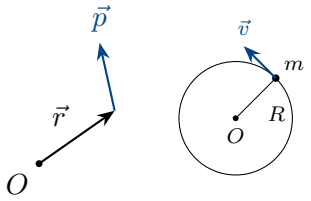
Momento angolare

▶ **Animazione interattiva**: le due masse che ruotano e la particella in moto rettilineo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$

è il MOMENTO ANGOLARE della particella rispetto al polo O.

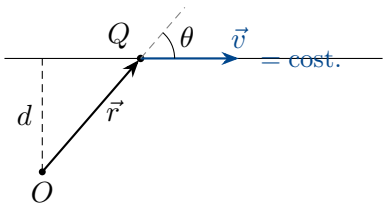
$$[L] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$



Per un moto circolare uniforme di raggio R (§ 5.2), con il polo nel centro, $\vec{r} \perp \vec{v}$ e quindi

$$|\vec{L}| = R\,m\,v.$$

Es. $\vec{L}$ esiste ($\neq \vec{0}$) anche per un moto rettilineo.



Traiettoria di una particella in moto rettilineo uniforme, a distanza d da O:

$$L = r\,m\,v\sin\theta = m\,v\,d,$$

perché $r\sin\theta = d$. L è costante, anche se $\vec{r}$ cambia.

Seconda legge della dinamica per le rotazioni

Combinando $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$ otteniamo il corrispettivo di $\vec{F} = m\,\vec{a}$ per le rotazioni:

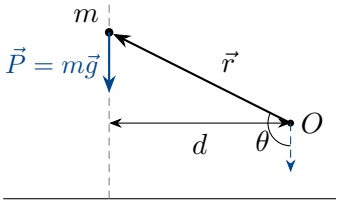
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau},$$

dove $\vec{v} \times \vec{p} = m\,\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ (vettori paralleli).

MOTO TRASLAZIONALE	MOTO ROTAZIONALE
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{p} = m\,\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Verifichiamo $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ nel caso di caduta libera (da ferma).



Il polo O è a distanza d dalla verticale di caduta; θ è l'angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (riportata in O, tratteggiata), e $r \sin\theta = d$.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \tau = r\,P \sin\theta = r\,m\,g \sin\theta = m\,g\,d$$

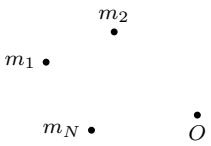
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad L = r\,m\,v \sin\theta = m\,v\,d = m\,g\,t\,d$$

($P = mg$ è il modulo della forza peso, $\vec{p} = m\,\vec{v}$, $v = g\,t$). Quindi

$$\frac{dL}{dt} = m\,g\,d = \tau.$$

($\vec{\tau}$ e $\vec{L}$ sono entrambi perpendicolari al foglio, con lo stesso verso.)

14.3 Momento angolare di un sistema di N particelle



Rispetto a un polo O (il punto rispetto a cui calcoliamo i momenti):

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Derivando, e usando ancora $\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$:

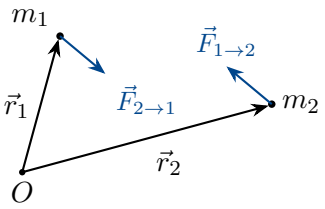
$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \underbrace{\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\substack{\text{somma di tutte le forze,} \\ \text{interne ed esterne,} \\ \text{che agiscono} \\ \text{sulla particella } i}} = \vec{\tau}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{int}}, \qquad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \underbrace{\vec{F}_i^{(\text{ext})}}_{\substack{\text{tutte le forze esterne} \\ \text{che agiscono} \\ \text{sulla particella } i}}$$

Se il sistema è isolato, $\vec{F}_i^{(\text{ext})} = \vec{0}\ \forall i \Rightarrow \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

Nel caso lineare (traslazionale, cioè senza prendere i prodotti vettoriali) $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ per il terzo principio della dinamica, e quindi $\dfrac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$ (§ 11.4). Per la dinamica rotazionale, invece, non è detto che $\vec{\tau}_{\text{int}} = \vec{0}$: per un sistema isolato

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{int}} \qquad \text{(somma di tutti i momenti torcenti interni).}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0



Per il terzo principio della dinamica

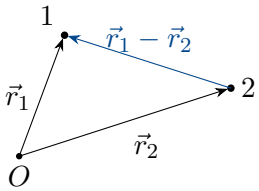
$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = \vec{0}.$$

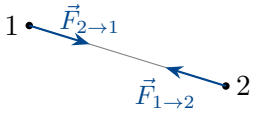
Nel caso di $\dfrac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$ abbiamo invece i momenti torcenti

$$\vec{\tau}_{2\to1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2\to1}, \qquad \vec{\tau}_{1\to2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1\to2}.$$

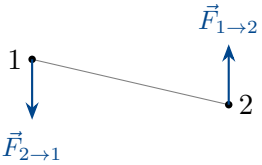
$$\vec{\tau}_{2\to1} + \vec{\tau}_{1\to2} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2\to1} + \vec{r}_2 \times \underbrace{\vec{F}_{1\to2}}_{-\vec{F}_{2\to1}} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{2\to1}$$

che è zero se e solo se $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{2\to1}$.





Qui $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{2\to1} \Rightarrow \vec{\tau}_{\text{int}} = \vec{0}$.



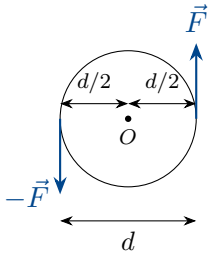
Ma se le forze non sono dirette lungo la congiungente, $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ non è parallelo a $\vec{F}_{2\to1} \Rightarrow \vec{\tau}_{\text{int}} \neq \vec{0}$.

Ricapitolando:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \qquad \text{(somma di tutte le forze esterne)}$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}} + \underbrace{\vec{\tau}_{\text{int}}}_{\substack{\neq \vec{0} \text{ se le forze interne non sono} \\ \text{collineari alle distanze relative} \\ \text{tra le particelle}}}$$

Es. Due forze uguali e opposte, $|\vec{F}| = 20\,\text{N}$, applicate ai due estremi di un diametro di una ruota, con $d = 40\,\text{cm}$.

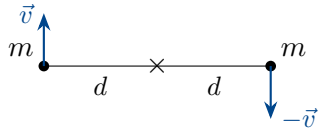


La somma delle due forze è nulla, ma non agiscono sulla stessa retta (una coppia di forze):

$$\tau = \frac{d}{2}F + \left(-\frac{d}{2}\right)(-F) = d\,F$$
$$= 40\,\text{cm} \cdot 20\,\text{N} = 0{,}40\,\text{m} \cdot 20\,\text{N} = 8\,\text{N} \cdot \text{m}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Due masse $m = 1{,}0\,\text{kg}$ ai capi di un'asta (di massa trascurabile) lunga $2d$, con $d = 0{,}5\,\text{m}$, che ruota attorno al punto medio con $\omega = 4{,}0\,\text{rad/s}$.



Ogni massa fa un moto circolare uniforme di raggio d:

$$v = \omega\, d = 4{,}0\,\text{rad/s} \cdot 0{,}5\,\text{m} = 2{,}0\,\text{m/s}$$

Con il polo nel punto medio, i due momenti angolari sono uguali (stessa direzione e verso):

$$L_{\text{tot}} = 2\, m\, v\, d = 2 \cdot 1{,}0\,\text{kg} \cdot 2{,}0\,\text{m/s} \cdot 0{,}5\,\text{m} = 2{,}0\,\text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$$

14.4 Conservazione del momento angolare totale

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{int}}$$

Per un sistema isolato ($\vec{F}_i^{\,(\text{ext})} = \vec{0}$) $\Rightarrow \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Se inoltre $\vec{\tau}_{\text{int}} = \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{L}_{\text{tot}} \text{ è costante}}$$

Questo succede per le forze centrali, cioè quelle dirette lungo la congiungente delle particelle (come la forza gravitazionale e la forza elastica).

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Lezione 15

Venerdì 13 novembre 2026

15.1 Le equazioni cardinali

Le due equazioni che governano il moto di un sistema di particelle (§ 13.2 e § 14.3) si chiamano EQUAZIONI CARDINALI:

$$\text{prima equazione cardinale:} \quad \frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \qquad (= M_{\text{tot}}\,\vec{A}_{\text{CM}})$$

$$\text{seconda equazione cardinale:} \quad \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

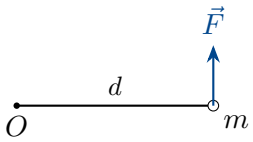
La seconda vale in questa forma quando le forze interne sono dirette lungo le congiungenti delle particelle, così che $\vec{\tau}_{\text{int}} = \vec{0}$ (§ 14.3).

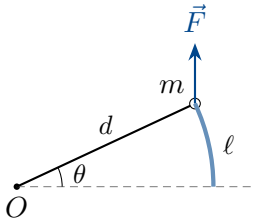
15.2 Dinamica rotazionale: dalla seconda legge a $\tau = dL/dt$

▶ **Animazione interattiva**: la massa sull'asta spinta da una forza verticale, con il grafico di $L(t)$

Riprendiamo il momento torcente e il momento angolare (§ 14.2) da un altro punto di vista: applichiamo $\vec{F} = m\,\vec{a}$ a un moto di rotazione e vediamo come compaiono.

Es. Una massa m è fissata all'estremo di un'asta di lunghezza d, imperniata in O. Su m agisce una forza $\vec{F}$ di modulo costante, sempre diretta verticalmente.

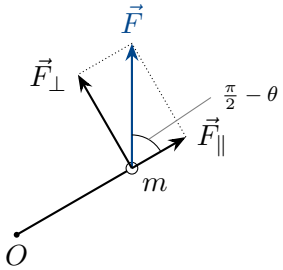




$|\vec{F}| = \text{costante}$

$\ell = \theta\, d$

(θ in radianti)



Scomponiamo $\vec{F}$ lungo l'asta ($\vec{F}_\parallel$) e perpendicolarmente all'asta ($\vec{F}_\perp$):

$$F_\parallel = F\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = F\sin\theta$$

$$F_\perp = F\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = F\cos\theta$$

- $\vec{F}_\parallel$ viene compensata dalla reazione vincolare dell'asta: $\vec{F}_\parallel + \vec{N} = \vec{0}$;[5]
- $\vec{F}_\perp$ accelera m in un moto circolare.

[5] Più precisamente, $\vec{F}_\parallel + \vec{N}$ non è esattamente nulla: deve essere diretta verso O, con modulo $m\,\omega^2 d$, per fornire l'accelerazione centripeta del moto circolare (§ 5.2). Quello che conta qui è che la componente lungo l'asta non fa ruotare m.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Cinematica. $\ell = \theta\, d$ è lo spostamento lungo la circonferenza (§ 5.2). La velocità di m:

$$\underbrace{\frac{d\ell}{dt}}_{\equiv v} = \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\equiv \omega} d \quad \Rightarrow \quad v = \omega\, d$$

(ω è la VELOCITÀ ANGOLARE). L'accelerazione:

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\equiv a_\perp} = \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\equiv \alpha} d \quad \Rightarrow \quad a_\perp = \alpha\, d$$

(α è l'ACCELERAZIONE ANGOLARE).

Dinamica. Applichiamo $\vec{F} = m\,\vec{a}$ perpendicolarmente all'asta ($a_\perp$ è l'accelerazione perpendicolare all'asta):

$$\begin{aligned} F_\perp = m\, a_\perp \;&\Rightarrow\; m\,\alpha\, d = F\cos\theta \\ &\Rightarrow\; m\,\frac{d\omega}{dt}\, d = F\cos\theta \\ &\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(m\,\omega\, d) = F\cos\theta \end{aligned}$$

e, moltiplicando per d,

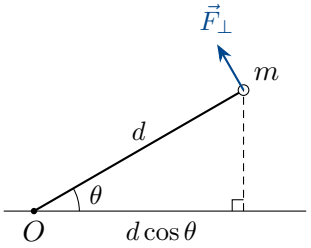
$$\frac{d}{dt}(\underbrace{m\,\omega\, d^2}_{=L}) = F\, d\cos\theta.$$

La quantità $m\,\omega\, d^2$ è proprio il momento angolare di m rispetto a O: da $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$,

$$L = r\, p\sin\varphi = r\, m\, v\sin\varphi = d\, m\,\omega\, d = m\,\omega\, d^2,$$

perché $r = d$ e l'angolo φ tra $\vec{r}$ e $\vec{p}$ è retto. Inoltre $d\cos\theta \equiv b$ è il braccio della forza (la distanza di O dalla retta su cui agisce $\vec{F}$). Quindi

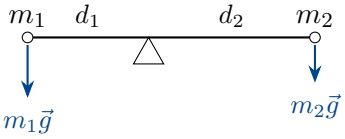
$$\boxed{\frac{dL}{dt} = F\, b = \tau}$$



Partendo solo da $\vec{F} = m\,\vec{a}$ abbiamo ritrovato la seconda legge della dinamica per le rotazioni (§ 14.2): momento angolare e momento torcente compaiono da sé quando scriviamo la seconda legge per un moto di rotazione.

Es. Due masse m_1 e m_2 agli estremi di un'asta appoggiata su un fulcro, a distanze d_1 e d_2 dal fulcro.

► **Animazione interattiva**: la leva, con masse e distanze regolabili



Rispetto al fulcro:

$$\tau_1 = m_1\, g\, d_1, \qquad \tau_2 = m_2\, g\, d_2$$

$\vec{\tau}_1$ tende a far ruotare il sistema in senso antiorario, $\vec{\tau}_2$ in senso orario.

Con $\hat{z}$ il versore perpendicolare al foglio, uscente:

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = (m_1\, g\, d_1 - m_2\, g\, d_2)\,\hat{z},$$

cioè, lavorando con le componenti, $\tau_{\text{tot}} = m_1\, g\, d_1 - m_2\, g\, d_2$. Se $\tau_{\text{tot}} = 0$ il sistema è in equilibrio: non c'è rotazione.

$$m_1\, g\, d_1 = m_2\, g\, d_2 \quad \Rightarrow \quad m_1\, d_1 = m_2\, d_2$$

Se $m_1 = 100\,\text{kg}$ e $m_2 = 10\,\text{kg}$:

$$d_2 = \frac{m_1}{m_2}\, d_1 = 10\, d_1.$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

15.3 Conservazione del momento angolare: un esempio

▶ **Animazione interattiva**: la massa legata a un filo che passa per un foro, con il raggio regolabile

Dalla seconda equazione cardinale, quando $\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$, $\vec{L}_{\text{tot}}$ è costante (§ 14.4).

Es. Una massa m in moto circolare uniforme di raggio d attorno a O ($|\vec{v}|$ = costante):

$$L_0 = d\,m\,v = d\,m\,\omega_0\,d = m\,\omega_0\,d^2.$$

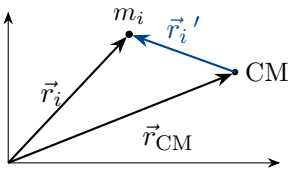
Se il raggio passa da d a $d/2$, siccome L si conserva, che cosa succede?

$$L_f = m\,\omega_f\Big(\frac{d}{2}\Big)^2 = m\,\omega_f\,\frac{d^2}{4}, \qquad L_f = L_0 \;\Rightarrow\; m\,\omega_f\,\frac{d^2}{4} = m\,\omega_0\,d^2 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_f = 4\,\omega_0}$$

15.4 Momento angolare e centro di massa

Nel § 13.7 abbiamo scomposto l'energia cinetica come $K = \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2 + K'$, usando $\vec{v}_i = \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,'$. Facciamo la stessa scomposizione per il momento angolare:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_i\,' \qquad (\vec{r}_i\,' \text{ è la posizione relativa al CM}).$$



$$\begin{aligned}
\vec{L}_{\text{tot}} &= \sum_i (\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_i\,') \times m_i(\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}_i\,') \\
&= \sum_i \Big[\vec{r}_{\text{CM}} \times (m_i\vec{V}_{\text{CM}}) + \vec{r}_{\text{CM}} \times (m_i\vec{v}_i\,') + \vec{r}_i\,' \times (m_i\vec{V}_{\text{CM}}) + \vec{r}_i\,' \times (m_i\vec{v}_i\,')\Big] \\
&= \vec{r}_{\text{CM}} \times \Big(\sum_i m_i\Big)\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \underbrace{\Big(\sum_i m_i\vec{v}_i\,'\Big)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\Big(\sum_i m_i\vec{r}_i\,'\Big)}_{=\vec{0}} \times \vec{V}_{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{tot}}\,'
\end{aligned}$$

dove $\vec{L}_{\text{tot}}\,' = \sum_i \vec{r}_i\,' \times m_i\vec{v}_i\,'$ è il momento angolare totale calcolato nel SR del CM. Il secondo termine è nullo perché $\sum_i m_i\vec{v}_i\,' = \vec{P}_{\text{tot}}\,' = \vec{0}$ (§ 13.7). Per il terzo:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_i\,' \;&\Rightarrow\; \sum_i m_i\vec{r}_i = \sum_i m_i\vec{r}_{\text{CM}} + \sum_i m_i\vec{r}_i\,' \\
&\Rightarrow\; \underbrace{\sum_i m_i\vec{r}_i}_{M_{\text{tot}}\vec{r}_{\text{CM}}} = M_{\text{tot}}\,\vec{r}_{\text{CM}} + \sum_i m_i\vec{r}_i\,' \;\Rightarrow\; \boxed{\sum_i m_i\vec{r}_i\,' = \vec{0}}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M_{\text{tot}}\,\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{tot}}\,'}$$

Quando scegliamo l'origine nel CM, $\vec{r}_{\text{CM}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{tot}}\,'$. Conviene calcolare il momento angolare totale rispetto al CM:

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

① in un sistema di N particelle si studia il moto del CM con la prima equazione cardinale:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M_{\text{tot}}\,\vec{A}_{\text{CM}};$$

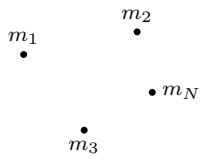
② i moti interni si studiano calcolando $\vec{L}_{\text{tot}}{}'$ (rispetto al CM) con la seconda equazione cardinale:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}{}'}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}}{}' \qquad \text{(momento torcente delle forze esterne calcolato rispetto al CM),}$$

anche se $\vec{A}_{\text{CM}} \neq \vec{0}$: le forze apparenti dovute alla scelta del SR del CM non contribuiscono a $\vec{\tau}_{\text{ext}}{}'$.[6]

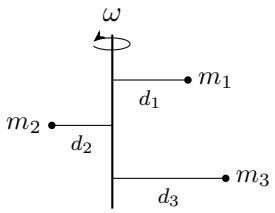
↪ Questo è come si descrive la dinamica di un corpo rigido.

15.5 Corpo rigido e momento di inerzia



Un CORPO RIGIDO è un insieme di particelle le cui distanze relative non cambiano.
CARATTERISTICA FONDAMENTALE: se una m_i è in rotazione rispetto a un certo asse con velocità angolare ω, allora anche tutte le altre sono in rotazione con la stessa ω.

Es. Tre masse fissate a un asse di rotazione, a distanze d_1, d_2, d_3 dall'asse.



Ogni massa fa un moto circolare di raggio d_i (come nel § 15.2):

$$L_1 = m_1\,\omega\,d_1^2, \qquad L_2 = m_2\,\omega\,d_2^2, \qquad L_3 = m_3\,\omega\,d_3^2$$

$$L_{\text{tot}} = L_1 + L_2 + L_3 = \underbrace{(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2)}_{\equiv \text{ MOMENTO DI INERZIA}}\,\omega \equiv I\,\omega$$

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i\,d_i^2} \qquad d_i \equiv \text{distanze dall'asse di rotazione,} \qquad [I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Per una distribuzione continua di massa:

$$I = \int r^2\,dm \qquad (r = \text{distanza di } dm \text{ dall'asse di rotazione}).$$

Es. Per la massa m sull'asta del § 15.2:

$$I = m\,d^2, \qquad L = I\,\omega = m\,d^2\,\omega, \qquad \frac{dL}{dt} = m\,d^2\,\frac{d\omega}{dt} = \tau = F\,b.$$

[6] Nel SR del CM su ogni particella agisce la forza apparente $-m_i\,\vec{A}_{\text{CM}}$ (§ 11.3). Il suo momento torcente totale rispetto al CM è $\sum_i \vec{r}_i{}' \times (-m_i\,\vec{A}_{\text{CM}}) = -\left(\sum_i m_i\,\vec{r}_i{}'\right) \times \vec{A}_{\text{CM}} = \vec{0}$, per il risultato appena dimostrato.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Energia cinetica di rotazione. Ogni massa ha velocità $v_i = \omega\, d_i$:

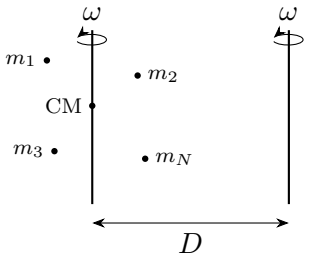
$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\omega\, d_i)^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i\, d_i^2\Big)\omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}\, I\, \omega^2}$$

Per una rotazione attorno a un asse passante per il CM, questa è la K' del teorema di König (§ 13.7).

15.6 Teorema degli assi paralleli

▶ **Animazione interattiva**: l'anello con l'asse a distanza D regolabile e il grafico di $I(D)$

Confrontiamo il momento di inerzia rispetto a un asse che passa per il CM e rispetto a un asse parallelo a questo.



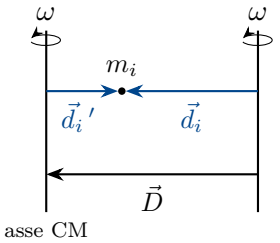
I_{CM} ≡ momento di inerzia rispetto a un asse di rotazione passante per il CM:

$$I_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, d_i'^2$$

I ≡ momento di inerzia rispetto a un asse parallelo a quello passante per il CM, a distanza D:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i\, d_i^2$$

Come sono legate $d_i'^2$ e d_i^2? Usiamo i vettori $\vec{d}_i$, $\vec{d}_i\,'$ e $\vec{D}$, perpendicolari agli assi (vedi figura):



$$\vec{d}_i = \vec{D} + \vec{d}_i\,'$$

$$d_i^2 = \vec{d}_i \cdot \vec{d}_i = (\vec{D} + \vec{d}_i\,') \cdot (\vec{D} + \vec{d}_i\,')$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{D} + \vec{d}_i\,') \cdot (\vec{D} + \vec{d}_i\,') = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\, d_i'^2}_{I_{\text{CM}}} + 2\,\vec{D} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{d}_i\,'}_{=\vec{0}} + \sum_{i=1}^{N} m_i\, D^2$$

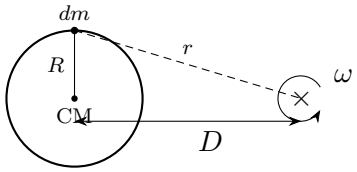
$$= I_{\text{CM}} + M_{\text{tot}}\, D^2$$

Il termine centrale è nullo perché $\vec{d}_i\,'$ è la parte di $\vec{r}_i\,'$ perpendicolare all'asse, e $\sum_i m_i\, \vec{r}_i\,' = \vec{0}$ (§ 15.4).

$$\boxed{I = I_{\text{CM}} + M_{\text{tot}}\, D^2}$$ TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI (o di Huygens–Steiner)

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Es. Anello sottile di massa M e raggio R, che ruota attorno a un asse perpendicolare al suo piano.



Rispetto all'asse passante per il CM tutti gli elementi dm sono a distanza R, e I_{CM} è facile da calcolare:

$$I_{\text{CM}} = \int r^2\, dm = R^2 \int dm = M\, R^2$$

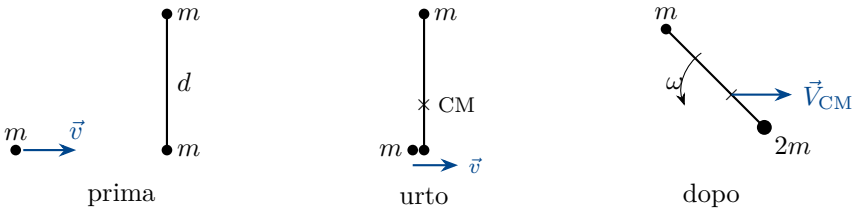
Rispetto a un asse a distanza D dal CM, $I = \int r^2\, dm$ è difficile da calcolare direttamente (r cambia da un dm all'altro). Con il teorema degli assi paralleli:

$$I = I_{\text{CM}} + M\, D^2 = M\, R^2 + M\, D^2 = M(R^2 + D^2)$$

15.7 Urto eccentrico

▶ **Animazione interattiva**: l'urto visto dal laboratorio e dal CM, con il punto d'impatto regolabile

Es. Un manubrio è formato da due masse m agli estremi di un'asta di lunghezza d (massa dell'asta trascurabile), fermo. Una particella di massa m con velocità $\vec{v}$ colpisce la massa inferiore del manubrio e rimane attaccata.



Non ci sono forze esterne: si conservano $\vec{P}_{\text{tot}}$ e $\vec{L}_{\text{tot}}$.

Moto del CM.

$$\vec{P}_{\text{tot},0} = m\,\vec{v}, \qquad M_{\text{tot}} = 3m, \qquad \vec{V}_{\text{CM},0} = \frac{\vec{v}}{3} = \vec{V}_{\text{CM},f} \equiv \vec{V}_{\text{CM}}$$

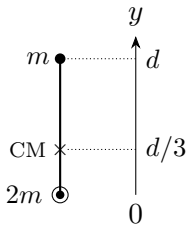
$$\frac{1}{2} M_{\text{tot}} V_{\text{CM}}^2 = \frac{P_{\text{tot}}^2}{2M_{\text{tot}}} = \frac{1}{2} 3m \frac{v^2}{9} = \frac{1}{6} m\, v^2$$

Dal teorema di König, $K = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} V_{\text{CM}}^2 + K'$, con $K_0 = \frac{1}{2} m\, v^2$:

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{6} m\, v^2 + K_0' \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_0' = \frac{1}{3} m\, v^2}$$

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0

Posizione del CM al momento dell'urto. La massa $2m$ è in basso ($y = 0$), la massa m in alto ($y = d$):



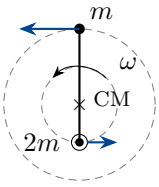
$$y_{\text{CM}} = \frac{m\,d}{3m} = \frac{d}{3}.$$

Dopo l'urto il CM si muove con $V_{\text{CM}} = v/3$ e il manubrio ruota attorno al CM con una certa velocità angolare ω. Quanto vale ω?

Conservazione del momento angolare. Calcoliamo $\vec{L}_{\text{tot}}{}'$, il momento angolare totale rispetto al CM (§ 15.4).

Prima dell'urto si muove solo la particella, a distanza $d/3$ dal CM:[7]

$$L'_0 = \frac{d}{3}\,m\,v = \frac{m\,v\,d}{3}$$



Dopo l'urto la massa $2m$ ruota a distanza $d/3$ dal CM, la massa m a distanza $2d/3$, entrambe con velocità angolare ω:

$$\begin{aligned} L'_f &= \frac{d}{3}\,2m\,\omega\,\frac{d}{3} + \frac{2d}{3}\,m\,\omega\,\frac{2d}{3} = \frac{2}{9}\,m\,\omega\,d^2 + \frac{4}{9}\,m\,\omega\,d^2 \\ &= \frac{6}{9}\,m\,\omega\,d^2 = \frac{2}{3}\,m\,\omega\,d^2 \equiv I_{\text{CM}}\,\omega, \qquad I_{\text{CM}} = \frac{2}{3}\,m\,d^2 \end{aligned}$$

Dato che $L'_0 = L'_f$:

$$\frac{\cancel{m}\,v\,\cancel{d}}{\cancel{3}} = \frac{2}{\cancel{3}}\,\cancel{m}\,\omega\,\cancel{d}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{v}{2d}}$$

Dopo l'urto il manubrio ruota attorno al CM con $\omega = v/(2d)$, mentre il CM avanza con $V_{\text{CM}} = v/3$.

Energia.

$$K_f = \frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2 + K'_f, \qquad K'_f = \frac{1}{2}\,I_{\text{CM}}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,m\,d^2\Big(\frac{v}{2d}\Big)^2 = \frac{1}{3}\,m\,d^2\,\frac{v^2}{4d^2} = \frac{1}{12}\,m\,v^2$$

Siccome $\frac{1}{2}\,M_{\text{tot}}\,V_{\text{CM}}^2$ non cambia (§ 14.1), l'energia dissipata è

$$\Delta K = K'_f - K'_0 = \frac{1}{12}\,m\,v^2 - \frac{1}{3}\,m\,v^2 = -\frac{1}{4}\,m\,v^2.$$

Siccome $K'_f \neq 0$, l'urto non è totalmente anelastico: anche se la particella resta attaccata, una parte dell'energia cinetica nel SR del CM rimane come energia di rotazione.

[7] Mettiamo l'origine nel punto in cui si trova il CM al momento dell'urto: lì $\vec{r}_{\text{CM}} = \vec{0}$ e quindi $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{tot}}{}'$ (§ 15.4). Possiamo allora calcolare L'_0 con le velocità nel SR del laboratorio, nel quale il manubrio è fermo.

© 2026 Oliver F. Piattella — CC BY-ND 4.0